

# Matemática

Nivel de Educación Media  
 Ciclo Básico



Texto para el estudiante

Texto para el estudiante

Matemática

Nivel de Educación Media, Ciclo Básico



## Matemática

Primer Grado  
 Nivel de Educación Media, Ciclo Básico



[www.mineduc.gob.gt/digecade/fp=solucionariosMatematica.asp](http://www.mineduc.gob.gt/digecade/fp=solucionariosMatematica.asp)



¡Aquí se encuentra el solucionario de los ejercicios y de las evaluaciones para que lo verifiques!



# Matemática

Nivel de Educación Media  
 Ciclo Básico



Claudia Patricia Ruiz Casasola de Estrada  
**Ministra de Educación**

Héctor Antonio Cermeño Guerra  
**Viceministro Técnico de Educación**

Erick Fernando Mazariegos Salas  
**Viceministro Administrativo de Educación**

Oscar René Saquil Bol  
**Viceministro de Educación Bilingüe e Intercultural**

María del Rosario Balcarcel Minchew  
**Viceministra de Educación Extraescolar y Alternativa**

Ana Cristina Estrada Quintero  
**Directora de la Dirección General de Gestión de Calidad Educativa**

**Autores**

Cayetano Salvador Salvador Digecade/Mineduc- Coordinador del equipo de expertos matemáticos.  
Alejandro Asijul Simón Digecade/Mineduc  
Andrea Marisol Morales Rabanales Digecade/Mineduc  
Agustín Pelicó Pérez Digebi/Mineduc  
José Alfredo Marroquín Azurdia Digebi/Mineduc

**Diseño de portada**

Lucía Alejandra Morales González

Con el apoyo de autoría y edición del Equipo de Expertos Matemáticos de la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media -EFPEM-.

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)  
Este documento se puede reproducir total o parcialmente, siempre y cuando se cite al Ministerio de Educación (Mineduc) como fuente de origen y que no sea para usos comerciales.

©Ministerio de Educación (Mineduc)  
6ª calle 1-87 zona 10.  
Teléfono: (+502) 24119595  
www.mineduc.gob.gt

**Cuarta edición, diciembre 2020.**

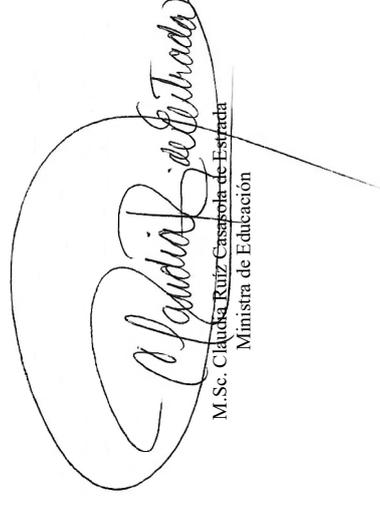
Queridos estudiantes:

El presente texto fue elaborado por el Ministerio de Educación en coordinación con la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media (EFPEM) de la Universidad de San Carlos de Guatemala y el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional de Japón (JICA), por medio del proyecto de mejoramiento de la calidad de la educación matemática en el ciclo básico.

Es un recurso educativo que favorecerá el desarrollo del pensamiento analítico y reflexivo, a través de las diferentes actividades de aprendizaje. Está diseñado para que puedan trabajar de manera autónoma.

Los invito a continuar estudiando con responsabilidad y dedicación para lograr sus metas y construir un futuro mejor. ¡Juntos saldremos adelante!

Atentamente,



M.Sc. Claudia Ruiz Casasola de Estrada  
Ministra de Educación

### Presentación del Texto

En cada página del Texto se desarrolla una clase que tiene diferentes momentos y se identifican con las siguientes letras:



La letra P representa el problema inicial. En este momento tiene que leer, comprender el problema y buscar soluciones, tomando en cuenta lo aprendido en clases anteriores. En algunas páginas aparece la letra P con un subíndice, lo que indica que hay más de un problema.



La letra S representa la solución del problema inicial. En algunas páginas aparece la letra S con un subíndice, lo que indica que la solución corresponde al problema con el mismo subíndice.



La letra C representa la conclusión. En la conclusión se le presenta la idea principal de la clase, tales como una definición o un procedimiento. En algunas páginas aparece la letra C con un subíndice que la relaciona con los subíndices del problema y la solución.



La letra E representa los ejercicios. Es para reforzar lo aprendido. Se presentan ejercicios con diferentes niveles de dificultad. En algunas páginas aparece la letra E con un subíndice, lo que indica que hay más de un grupo de ejercicios.

### Información complementaria

En el Texto se utilizan iconos que indican lo siguiente.



El Quetzal le indica conceptos nuevos e importantes para comprender el tema de la clase.

La mano le recuerda los conceptos aprendidos en clases anteriores.



### Índice

Unidad 1 Aritmética.....	5 - 52
Unidad 2 Álgebra.....	53 - 102
Unidad 3 Función.....	103 - 123
Unidad 4 Etnomatemática.....	124 - 138
Unidad 5 Geometría.....	139 - 178
Unidad 6 Estadística.....	179 - 194
Unidad 7 Lógica.....	195 - 200

Mayor



$$-4^2 = -(4 \times 4) \\ = -16$$

$$|+3| = 3$$

$$|-3| = 3$$

$$(-4)^2 = (-4) \times (-4)$$

# Unidad 1 •

# Aritmética

Sección 1 Números naturales  
Clase 2 Descomposición en factores primos

Descomponga 24 en factores primos.



Un factor primo es un factor que es un número primo. Los factores primos son los números primos que son divisores de un número entero.



**S1**

Para descomponer 24 en factores primos:

Escriba el número y divida entre 2.  $24 \rightarrow 2$  2 es el menor factor primo de 24.

Escriba el cociente y divida entre 2.  $12 \rightarrow 2$  2 es el menor factor primo de 12.

Continúe dividiendo entre números primos hasta obtener 1.  $6 \rightarrow 2$  2 es el menor factor primo de 6.

$3 \rightarrow 3$  3 es el menor factor primo de 3.

El número original puede ser expresado como un producto de números primos.

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

Respuesta: la descomposición de 24 en factores primos es  $2 \times 2 \times 2 \times 3$ .



**S2**

Para descomponer 45 en factores primos:

Escriba el número y divida entre 3.  $45 \rightarrow 3$  3 es el menor factor primo de 45.

Escriba el cociente y divida entre 3.  $15 \rightarrow 3$  3 es el menor factor de 15.

Continúe dividiendo entre números primos hasta obtener 1.  $5 \rightarrow 5$  5 es el menor factor primo de 5.

El número original puede ser expresado como un producto de números primos.

$45 = 3 \times 3 \times 5$

Respuesta: la descomposición de 45 en factores primos es  $3 \times 3 \times 5$ .



A expresar un número como un producto de sus factores primos se le llama **descomposición en factores primos**.



Descomponga en factores primos los siguientes números.

a. 12    b. 16    c. 36    d. 72    e. 81    f. 105

Sección 1 Números naturales  
Clase 1 Números primos y compuestos

Encuentre el número de divisores de los siguientes números.



- 3, 4, 11, 22, 23 y 32

Un número es divisor de otro cuando el residuo es igual a cero.



Para identificar el número de divisores de cada número, se construye la siguiente tabla.

Número	Divisores	Número de divisores
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
11	1, 11	2
22	1, 2, 11, 22	4
23	1, 23	2
32	1, 2, 4, 8, 16, 32	6

En la tabla se observa que hay números que tienen únicamente dos divisores y otros que tienen más de dos divisores.

3, 11 y 23 tienen únicamente dos divisores y son considerados números primos por esa característica. 4, 22 y 32 tienen más de dos divisores y son considerados números compuestos por esa característica.



A un número que es divisible entre 1 y entre sí mismo se le llama **número primo**, y a un número que es divisible entre más de dos divisores se le llama **número compuesto**. El 1 no es número primo ni número compuesto.



- Identifique cuáles de los siguientes números son primos.
 

a. 13    b. 21    c. 37    d. 77
- Identifique cuáles de los siguientes números son compuestos.
 

a. 17    b. 42    c. 69    d. 91
- Identifique cuáles de los siguientes números son primos o compuestos.
 

14, 55, 44, 29, 67, 80, 73, 95 y 100

## Sección 1 Números naturales

### Clase 3 Mínimo común múltiplo (MCM)

Encuentre el mínimo común múltiplo de 6 y 8.



Para encontrar el mínimo común múltiplo de 6 y 8, se puede aplicar una de las siguientes formas:

Forma 1. Por enumeración de múltiplos.

Múltiplos de 6: 6 12 18 24 30 36 42 48 54

Múltiplos de 8: 8 16 24 32 40 48 56

El mínimo común múltiplo de 6 y 8 es el menor de los múltiplos comunes, es decir, 24. Se expresa:  $MCM(6, 8) = 24$

Forma 2. Por descomposición en factores primos.

$$\begin{array}{r} 6 \ 2 \\ 3 \ 3 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \ 2 \\ 4 \ 2 \\ 2 \ 2 \\ 1 \end{array}$$

$$6 = 2 \times 3 \quad 8 = 2 \times 2 \times 2$$

Después de la descomposición en factores primos, se multiplican los factores comunes y no comunes de ambos números. El producto es el mínimo común múltiplo.

$$\begin{array}{r} 6 = \\ 8 = \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \times \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \times \begin{array}{r} 3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$MCM(6, 8) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$



Al menor de los múltiplos comunes de dos o más números se le llama **mínimo común múltiplo (MCM)**. Se puede encontrar el MCM por enumeración de múltiplos o por descomposición en factores primos.

Para encontrar el MCM por descomposición en factores primos: se descomponen los números en sus factores primos, se identifican los factores comunes y no comunes, y se multiplican estos factores.

Encuentre el MCM de los siguientes incisos.

- a. 6 y 9    b. 15 y 20    c. 8 y 12    d. 7 y 14    e. 12 y 18    f. 15 y 30



## Sección 1 Números naturales

### Clase 4 Máximo común divisor (MCD)

Encuentre el máximo común divisor de 8 y 12.



Para encontrar el máximo común divisor de 8 y 12, se puede aplicar una de las siguientes formas:

Forma 1. Por enumeración de divisores.

Divisores de 8: 1 2 4 8

Divisores de 12: 1 2 3 4 6 12

El máximo común divisor de 8 y 12 es el mayor de los divisores comunes, es decir, 4. Se expresa:  $MCD(8, 12) = 4$

Forma 2. Por descomposición en factores primos.

$$\begin{array}{r} 8 \ 2 \\ 4 \ 2 \\ 2 \ 2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \ 2 \\ 6 \ 2 \\ 3 \ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 \quad 12 = 2 \times 2 \times 3$$

Después de la descomposición en factores primos, se multiplican los factores comunes. El producto es el máximo común divisor.

$$\begin{array}{r} 8 = \\ 12 = \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \times \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

$$MCD(8, 12) = 2 \times 2 = 4$$



Al mayor de los divisores comunes de dos o más números se le llama **máximo común divisor (MCD)**. Se puede encontrar el MCD por enumeración de divisores o por descomposición en factores primos.

Para encontrar el MCD por descomposición en factores primos: se descomponen los números en sus factores primos, se identifican los factores comunes, y se multiplican estos factores.

Encuentre el MCD de los siguientes incisos.

- a. 6 y 9    b. 12 y 18    c. 12 y 24    d. 18 y 27    e. 24 y 36    f. 25 y 30



## Sección 2 Operaciones con fracciones y decimales

### Clase 1 Suma y resta de números decimales



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $14.6 + 2.35$   
b.  $36.4 - 2.18$



$$\begin{array}{r} 14.60 \\ + 2.35 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36.40 \\ - 2.18 \\ \hline \end{array}$$

Para sumar o restar decimales verticalmente:

Paso 1. Anote el primer sumando (o minuendo, en caso de la resta).

Paso 2. Anote el segundo sumando (o sustraendo) debajo del primer número, alineando verticalmente el punto decimal.

Paso 3. Sume o reste los números como en los números naturales. Si es necesario, se puede agregar 0, como se muestra a la izquierda.

Paso 4. En el resultado, mantenga alineado verticalmente el punto decimal.



Para sumar y restar números decimales, se utiliza el mismo procedimiento que en los números naturales. Al efectuar la operación verticalmente, el punto decimal se mantiene en la misma posición.



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $3.6 + 5.1$   
b.  $9.7 - 4.2$   
c.  $4.6 + 3.8$   
d.  $6.3 - 2.2$   
e.  $8.6 + 4.29$   
f.  $8.4 - 3.16$   
g.  $5.26 + 2.11$   
h.  $73.48 - 3.28$   
i.  $12.5 + 3.31$   
j.  $18.7 - 5.62$   
k.  $21.3 + 10.7$   
l.  $24.2 - 13.1$   
m.  $7.9 + 2.06$   
n.  $33.7 - 31.53$   
o.  $30.72 + 10.27$   
p.  $27.77 - 7.77$

## Sección 2 Operaciones con fracciones y decimales

### Clase 2 Multiplicación y división de números decimales

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $2.16 \times 3.4$   
b.  $8.84 \div 2.6$



$$\begin{array}{r} 2.16 \\ \times 3.4 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2.16 \\ \times 3.4 \\ \hline 864 \\ 648 \\ \hline 7344 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2.16 \rightarrow \text{dos cifras decimales} \\ \times 3.4 \rightarrow \text{+ una cifra decimal} \\ \hline 864 \\ 648 \\ \hline 7344 \end{array}$$

Paso 3. Encuentre el total de cifras decimales de ambos factores.

Paso 4. Coloque el punto decimal de acuerdo a las cifras decimales de ambos factores, contando de derecha a izquierda; en este caso, el punto está en la tercera posición.

- b.  $2.6\overline{)88.4}$

$$\begin{array}{r} 26\overline{)884} \\ \times 10 \end{array}$$

Paso 1. Prepare el cálculo de forma vertical.

Paso 2. Mueva el punto decimal en el divisor hacia la derecha para que el divisor sea un número entero.

$$\begin{array}{r} 26\overline{)884} \\ \times 10 \times 10 \end{array}$$

Paso 3. Mueva el punto decimal en el dividendo el mismo número de lugares que en el divisor.

$$\begin{array}{r} 34 \\ 26\overline{)884} \\ \underline{78} \end{array}$$

Paso 4. Divida como en los números naturales.

$$\begin{array}{r} 104 \\ 26\overline{)884} \\ \underline{78} \\ 104 \\ \underline{104} \\ 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 26\overline{)884} \\ \underline{78} \\ 104 \\ \underline{104} \\ 000 \end{array}$$

Paso 5. Coloque el punto decimal directamente arriba del punto decimal en el dividendo.



Para multiplicar números decimales, se utiliza el mismo procedimiento que en los números naturales y se coloca el punto decimal en la posición que el total de cifras decimales indica, contando de derecha a izquierda.

Para dividir un número decimal entre otro decimal, se convierte el divisor en un número natural, moviendo el punto decimal hacia la derecha hasta convertirlo en natural. Luego, se divide utilizando el mismo procedimiento que los números naturales.



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $8.3 \times 4.1$   
b.  $7.2 \div 1.2$   
c.  $7.8 \times 3.2$   
d.  $3.22 \div 1.4$   
e.  $1.36 \times 2.4$   
f.  $9.75 \div 3.25$   
g.  $3.4 \times 4.67$   
h.  $29.61 \div 4.7$

Sección 2 Operaciones con fracciones y decimales  
Clase 3 Suma y resta de fracciones



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$   
b.  $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

Para sumar o restar fracciones de igual denominador, se suman o se restan los numeradores y se copia el denominador.

Suma  
 $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$   
Resta  
 $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$



a. 
$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} + \frac{2 \times 1}{2 \times 6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

Se buscan fracciones equivalentes de acuerdo con el MCM de los denominadores, que den como resultado el mismo denominador para ambos sumandos. En este caso, el MCM de 4 y 6 es 12.

Se suman los numeradores y se copia el denominador común.

b. 
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{4 \times 3} - \frac{1 \times 3}{3 \times 4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

Se buscan fracciones equivalentes de acuerdo con el MCM de los denominadores, que den como resultado el mismo denominador para el minuendo y sustraendo. En este caso, el MCM de 3 y 4 es 12.

Se restan los numeradores y se copia el denominador común.



Para sumar y restar fracciones con distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes con igual denominador utilizando el MCM. Luego, se suman o restan los numeradores y se copia el denominador.



- Calcule las siguientes expresiones.  
a.  $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$   
b.  $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$   
c.  $\frac{1}{2} + \frac{5}{7}$   
d.  $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$   
e.  $\frac{2}{3} + \frac{4}{9}$   
f.  $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$   
g.  $\frac{5}{6} + \frac{1}{8}$   
h.  $\frac{8}{9} - \frac{1}{6}$

Sección 2 Operaciones con fracciones y decimales  
Clase 4 Multiplicación y división de fracciones



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$   
b.  $\frac{3}{7} \div \frac{2}{5}$



a. 
$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{3 \times 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Se multiplican los numeradores. Se multiplican los denominadores.

Se simplifica el resultado.

b. 
$$\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{7 \times 2} = \frac{15}{14}$$

Se cambia la división a multiplicación invirtiendo el divisor.

Se multiplican los numeradores.

Se multiplican los denominadores.



Para encontrar el producto entre dos fracciones, se multiplica numerador por numerador, denominador por denominador y se simplifica el resultado.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Para dividir dos fracciones, se cambia la división por una multiplicación invirtiendo la segunda fracción (divisor), se resuelve la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$   
b.  $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$   
c.  $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$   
d.  $\frac{7}{9} \div \frac{2}{6}$   
e.  $6 \times \frac{2}{9}$   
f.  $5 \div \frac{2}{3}$   
g.  $\frac{3}{5} \times 4$   
h.  $\frac{6}{7} \div 3$

Sección 3 Números positivos y negativos  
Clase 2 Números enteros en una recta numérica

- P** a. Ubique el número +3 en la recta numérica.  
b. ¿Dónde se ubica el número -3?



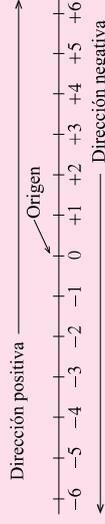
- b. El número -3 se ubica 3 unidades a la izquierda de 0 sobre la recta numérica por ser un número negativo.



Los números negativos están a la izquierda de 0.

- C** A los números +1, +2, +3, ... se les llama números enteros positivos.  
A los números -1, -2, -3, ... se les llama números enteros negativos.  
A los números enteros positivos, negativos y 0 se les llama enteros.

Los números enteros se pueden representar en la recta numérica de la siguiente forma:



Al punto 0 en la recta numérica se le llama origen. La dirección a la derecha en la recta numérica se dice que es la dirección positiva, y la dirección a la izquierda se dice que es la dirección negativa.

- E** a. Ubique los siguientes números en la recta numérica: +3, -5, -1, +5.

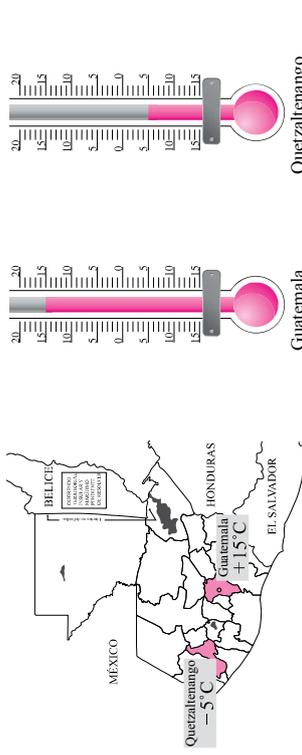


- b. Escriba el número que corresponde a cada letra en la recta numérica.



Sección 3 Números positivos y negativos  
Clase 1 Significado de números positivos y negativos

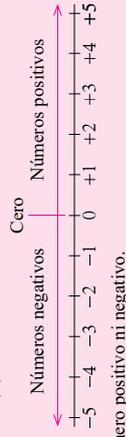
En el mapa que está abajo se muestra la temperatura registrada en los departamentos de Guatemala y Quetzaltenango el 24 de enero de 2017. ¿Cuál fue la temperatura registrada en cada departamento?



La temperatura registrada en el departamento de Guatemala fue de +15°C y se lee más 15 grados centígrados. La de Quetzaltenango fue de -5°C y se lee menos 5 grados centígrados.

- S** Las temperaturas sobre 0°C se representan con el signo + antes del número y las temperaturas debajo de 0°C se representan con el signo - antes del número.

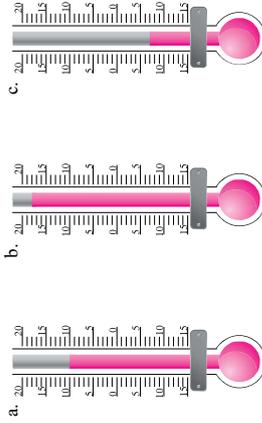
**C** A un número al que le antecede un signo + se le llama **número positivo** y a un número al que le antecede un signo - se le llama **número negativo**. Un número positivo se puede escribir con o sin un signo positivo (+).



Cero no es un número positivo ni negativo.

- E** 1. Expresé las medidas de temperatura utilizando números positivos y negativos.  
a. 11°C arriba de los 0°C    b. 3°C debajo de 0°C    c. 8°C debajo de 0°C

2. Escriba la temperatura que marca cada termómetro.



3. Clasifique los siguientes números en la tabla.

+2, -7, + $\frac{1}{3}$ , -2.5	Negativos (-)	Positivos (+)
	0	

Sección 3 Números positivos y negativos  
Clase 3 Fracciones en una recta numérica



- Ubique el número  $+\frac{1}{2}$  en la recta numérica.
- Ubique el número  $-\frac{1}{2}$  en la recta numérica.



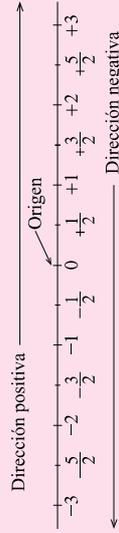
- Los números positivos se ubican a la derecha del punto 0. Entonces,  $+\frac{1}{2}$  se ubica  $\frac{1}{2}$  unidades a la derecha del 0.
- Los números negativos se ubican a la izquierda del punto 0. Entonces,  $-\frac{1}{2}$  se ubica  $\frac{1}{2}$  unidades a la izquierda de 0.



Los números negativos están a la izquierda de 0.



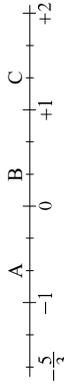
Las fracciones se pueden representar en la recta numérica de la siguiente forma:



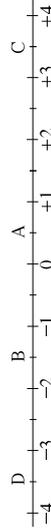
- Ubique los siguientes números en la recta numérica:  $+\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{3}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $+\frac{5}{2}$ .



- Escriba la fracción que corresponde a cada letra en la recta numérica.



- Escriba la fracción que corresponde a cada letra en la recta numérica.



Sección 3 Números positivos y negativos  
Clase 4 Números decimales en una recta numérica



- Ubique el número  $+2.5$  en la recta numérica.
- Ubique el número  $-2.5$  en la recta numérica.



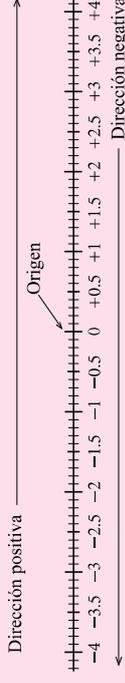
- Los números positivos se ubican a la derecha del punto 0. Entonces,  $+2.5$  está  $2.5$  unidades a la derecha del 0.
- Los números negativos se ubican a la izquierda del punto 0. Entonces,  $-2.5$  está  $2.5$  unidades a la izquierda del 0.



Los números negativos están a la izquierda de 0.



Los números decimales se pueden representar en la recta numérica de la siguiente forma:



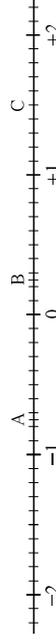
- Ubique los siguientes números en la recta numérica:  $+1.2$ ,  $-3.5$ ,  $-2.1$ ,  $+4.2$ .



- Escriba el número decimal que corresponde a cada letra en la recta numérica.



- Escriba el número decimal que corresponde a cada letra en la recta numérica.



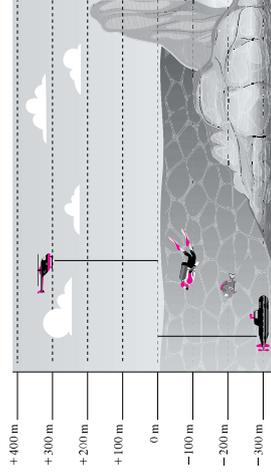
### Sección 3 Números positivos y negativos

## Clase 5 Números enteros en la vida cotidiana (1)

**P**

Observe la imagen. En ella se muestra la altura de distintos objetos con respecto al nivel del mar. Por ejemplo, la altura del helicóptero es de 300 m sobre el nivel del mar y se escribe como +300 m. El submarino está a 300 m debajo del nivel del mar y se escribe como -300 m.

- Escriba la altura del punto más alto de la montaña con respecto al nivel del mar.
- Escriba la altura del buzo con respecto al nivel del mar.
- Escriba la altura del pez con respecto al nivel del mar.



¡Cuidado con la altura!



**S**

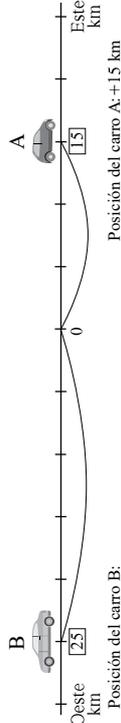
- El punto más alto de la montaña es de +200 m del nivel del mar.
- El buzo está a -100 m del nivel del mar.
- El pez está a -200 m del nivel del mar.

**C**

Quando se establece un punto de referencia, hay cantidades que tienen sentido contrario entre sí. Por tanto, se puede asignar a esas cantidades un valor positivo (+) o un valor negativo (-).

**E**

- Se expresa como +15 km la posición del carro A que se ubica a 15 km hacia el Este del punto 0. ¿Cómo se expresa la posición del carro B que está a 25 km hacia el Oeste del punto 0?



- Si en una carretera se establece que el punto de referencia es 0, la dirección hacia el Norte se expresa como positiva y la dirección al Sur se expresa como negativa, responda.
  - ¿Cómo expresar la posición del punto A que está a 6 km al Norte de 0?
  - ¿Cómo expresar la posición del punto B que está a 13 km al Sur de 0?
  - Si un punto C está a -12 km, ¿en qué dirección está C del punto 0? y ¿a qué distancia?
- Quando 3 minutos después se expresa como +3 minutos, ¿cómo se expresan los siguientes momentos?
  - 5 minutos después
  - 7 minutos antes

### Sección 3 Números positivos y negativos

## Clase 6 Números enteros en la vida cotidiana (2)

**P<sup>1</sup>**

El administrador de la ciudad maya Iximché tiene como meta recibir 200 visitantes por día. La tabla muestra el número de visitantes de la semana pasada.

Complete la tabla con la diferencia entre el número de visitantes y la meta.

Si el número de visitantes es mayor que la meta, indique la diferencia como un número positivo. Si el número de visitantes es menor que la meta, indique la diferencia como un número negativo.

Días	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Visitantes	150	75	250	192	200	240
Diferencia con la meta						

10 más que la meta se expresa como +10.  
4 menos que la meta se expresa como -4.



**S<sup>1</sup>**

Días	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Visitantes	150	75	250	192	200	240
Diferencia con la meta	-50	-125	+50	-8	0	+40

**P<sup>2</sup>**

Expresé con un número positivo o negativo cada diferencia respecto a la cantidad de referencia.

- 6 lb menos del "peso ideal"
- 15 personas más de "las esperadas"
- 3 minutos antes del "tiempo actual"
- 5 quetzales menos de la "cantidad que se tenía"

**S<sup>2</sup>**

Utilice números negativos para expresar cantidades con propiedades opuestas.

- 6 lb
  - +15 personas
  - 3 minutos
  - 5 quetzales
- En la vida cotidiana se utilizan números positivos o negativos para representar cantidades opuestas.

**C**

Quando se utilizan cantidades mayores o menores a una cantidad de referencia, se pueden utilizar números positivos o negativos. Si las cantidades son mayores a la cantidad de referencia, se utilizan números positivos, y si son menores, se utilizan números negativos.

**E**

- Un fabricante de vestuario tiene como meta producir 250 pantalones por día. Complete la siguiente tabla, tomando como positiva la cantidad que sobrepasa la meta.

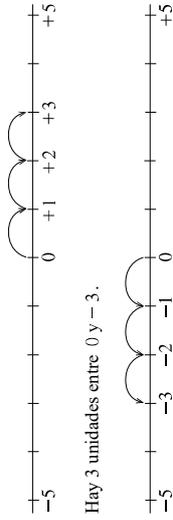
Días	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Pantalones	275	234	215	300	255
Diferencia con la meta					

- Expresé con un número positivo o negativo cada diferencia respecto a la cantidad de referencia.
  - 5 horas después del "tiempo actual"
  - 10 personas menos de "las esperadas"
  - 2 lb más del "peso ideal"

Sección 3 Números positivos y negativos  
Clase 7 Valor absoluto de un número entero

Con base en una recta numérica, responda.

- a. ¿Cuál es la distancia entre  $0$  y  $+3$ ?  
b. ¿Cuál es la distancia entre  $0$  y  $-3$ ?  
a. Hay 3 unidades entre  $0$  y  $+3$ .



A la distancia que hay entre  $0$  y un número se le llama **valor absoluto**. Se expresa por medio del símbolo  $|\cdot|$ .

$|+3|$  significa que la distancia entre  $0$  y  $+3$  es 3 unidades. Entonces,  $|+3| = 3$   
 $|-3|$  significa que la distancia entre  $0$  y  $-3$  es 3 unidades. Entonces,  $|-3| = 3$

A los números como  $-2$  y  $+2$ , que tienen igual distancia con respecto a  $0$ , se les llama **números opuestos**.



1. ¿Cuál es la distancia entre  $0$  y  $-4$ ? Utilice la recta numérica.



2. ¿Cuál es la distancia entre  $0$  y  $+5$ ? Utilice la recta numérica.



3. Encuentre el valor de los siguientes números.  
a.  $|-8|$       b.  $|+10|$       c.  $|-7|$       d.  $|+7|$

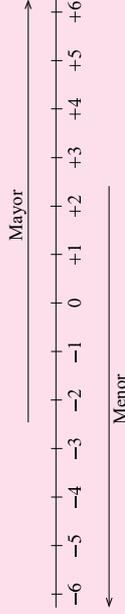
Sección 3 Números positivos y negativos  
Clase 8 Comparación de números enteros

- P** a. ¿Cuál de los números,  $+3$  o  $+5$ , está más a la derecha en la recta numérica?  
b. ¿Cuál de ellos es el mayor?  
c. ¿Cuál de los números,  $-1$  o  $-5$ , es mayor?



- S** a.  $+5$  está más a la derecha que  $+3$ .  
b. El mayor es  $+5$ .  
c.  $-1$  está más a la derecha que  $-5$  en la recta numérica. Por tanto,  $-1$  es mayor.

**C** En los números positivos, el que está más a la derecha en la recta numérica es mayor. Si se extiende la idea a los números negativos, el número que está a la derecha en la recta numérica es mayor.



Los símbolos " $>$ " (mayor que) y " $<$ " (menor que) son utilizados para expresar una relación de orden entre dos números. A ellos se les llama **signos de desigualdad**.

Ejemplo:

$-2$  se encuentra más a la derecha que  $-5$  en la recta numérica. Por tanto,  $-2$  es mayor que  $-5$ . Esta relación de orden se expresa como  $-2 > -5$ , y se lee " $-2$  es mayor que  $-5$ ".

Otra forma de expresar esta relación es:  $-5$  se encuentra más a la izquierda que  $-2$  en la recta numérica. Por tanto,  $-5$  es menor que  $-2$ . Esta relación se expresa como  $-5 < -2$ , y se lee " $-5$  es menor que  $-2$ ".

- E** 1. Compare los siguientes pares de números y escriba  $>$  o  $<$  donde corresponda.

- a.  $+4 \square -6$       b.  $-6 \square -3$       c.  $+5 \square -2$       d.  $-5 \square +5$       e.  $-4 \square 0$

2. Identifique el número mayor de cada par de números.

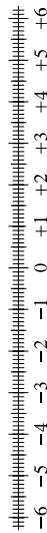
- a.  $+3, -8$       b.  $-3, -1$       c.  $-1, 0$       d.  $-4, -2$       e.  $+2, -5$

3. Ordene los siguientes números de menor a mayor.

- a.  $-3, +2, -5, +1$       b.  $+3, -4, -1, 0, +1$       c.  $+4, +2, -3, -1, -4$

Sección 3 Números positivos y negativos  
Clase 10 Comparación de números decimales

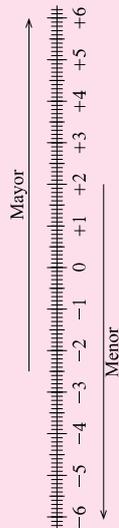
- P**
- ¿Cuál de los números,  $+1.4$  o  $+5.3$ , está más a la derecha en la recta numérica?
  - ¿Cuál de ellos es el mayor?
  - ¿Cuál de los números,  $-1.4$  o  $-5.3$ , es mayor?



- S**
- El número  $+5.3$  está más a la derecha que  $+1.4$ .
  - El mayor es  $+5.3$ .
  - El número  $-1.4$  está más a la derecha que  $-5.3$  en la recta numérica. Por tanto,  $-1.4$  es el mayor.

**C**

En los números positivos, el que está más a la derecha en la recta numérica es mayor. Si se extiende la idea a los números negativos, el número que está a la derecha en la recta numérica es mayor.



Ejemplo:

$-1.4$  se encuentra más a la derecha que  $-5.3$  en la recta numérica. Por tanto,  $-1.4$  es mayor que  $-5.3$ . Esta relación de orden se expresa como  $-1.4 > -5.3$ , y se lee “ $-1.4$  es mayor que  $-5.3$ ”.

Otra forma de expresar esta relación es:  $-5.3$  se encuentra más a la izquierda que  $-1.4$  en la recta numérica. Por tanto,  $-5.3$  es menor que  $-1.4$ . Esta relación de orden se expresa como  $-5.3 < -1.4$ , y se lee “ $-5.3$  es menor que  $-1.4$ ”.

- E**
- Compare los siguientes pares de números y escriba  $>$  o  $<$  donde corresponda.
    - $+2.6 \square +4.1$
    - $-5.2 \square -3.6$
    - $+1.8 \square -2.2$
    - $-4.5 \square +4.5$
    - $-3.4 \square 0$
  - Identifique el número mayor de cada par de números.
    - $+3.8, +8.3$
    - $-2.6, -1.5$
    - $-6.2, 0$
    - $-4.4, +3.3$
    - $+5.2, -7.6$

3. Ordene los siguientes números decimales de menor a mayor.
- $-1.8, +3.1, -5.3, +6.8$
  - $+7.1, -4.2, -2.9, 0, +7.8$
  - $+5.6, +4.7, -4.7, -1.2, -8.5$

Sección 3 Números positivos y negativos  
Clase 9 Comparación de fracciones

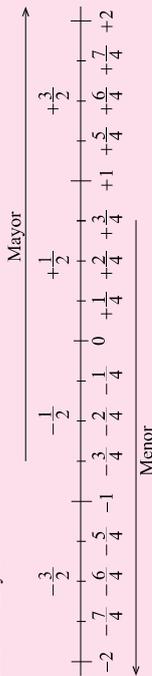
- P**
- ¿Cuál de los números,  $+\frac{1}{2}$  o  $+\frac{1}{4}$ , está más a la derecha en la recta numérica?
  - ¿Cuál de ellos es el mayor?
  - ¿Cuál de los números,  $-\frac{1}{2}$  o  $-\frac{1}{4}$ , es mayor?



- S**
- $+\frac{1}{2}$  está más a la derecha que  $+\frac{1}{4}$ .
  - El mayor es  $+\frac{1}{2}$ .
  - $-\frac{1}{4}$  está más a la derecha que  $-\frac{1}{2}$  en la recta numérica. Por tanto,  $-\frac{1}{4}$  es el mayor.

**C**

En los números positivos, el que está más a la derecha en la recta numérica es mayor. Si se extiende la idea a los números negativos, el número que está a la derecha en la recta numérica es mayor.



Ejemplo:

$-\frac{1}{4}$  se encuentra más a la derecha que  $-\frac{1}{2}$  en la recta numérica. Por tanto,  $-\frac{1}{4}$  es mayor que  $-\frac{1}{2}$ . Esta relación de orden se expresa como  $-\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$ , y se lee “ $-\frac{1}{4}$  es mayor que  $-\frac{1}{2}$ ”.

Otra forma de expresar esta relación es:  $-\frac{1}{2}$  se encuentra más a la izquierda que  $-\frac{1}{4}$  en la recta numérica. Por tanto,  $-\frac{1}{2}$  es menor que  $-\frac{1}{4}$ . Esta relación de orden se expresa como  $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$ , y se lee “ $-\frac{1}{2}$  es menor que  $-\frac{1}{4}$ ”.

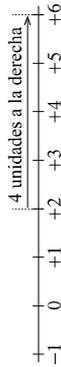
- E**
- Compare los siguientes pares de números y escriba  $>$  o  $<$  donde corresponda.
    - $+\frac{1}{4} \square +\frac{3}{4}$
    - $-\frac{1}{2} \square -\frac{3}{4}$
    - $+\frac{1}{2} \square -\frac{1}{4}$
    - $-\frac{3}{2} \square +\frac{3}{2}$
    - $-\frac{1}{2} \square 0$
  - Identifique el número mayor de cada par de números.
    - $+\frac{1}{5}, +\frac{1}{2}$
    - $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$
    - $-\frac{3}{4}, 0$
    - $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$
    - $+\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}$
  - Ordene los siguientes números de menor a mayor.
    - $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}$
    - $+\frac{3}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, +\frac{1}{5}$
    - $+\frac{3}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}$

Sección 3 Números positivos y negativos  
Clase 11 Desplazamiento en una recta numérica

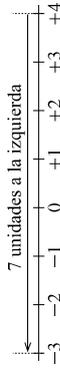
Con base en una recta numérica, responda.

- ¿Qué número es 4 unidades mayor que +2?
- ¿Qué número es 7 unidades menor que +4?
- ¿Cuántas unidades es menor -5 con respecto a +2?
- ¿Cuántas unidades es mayor +6 con respecto a +2?

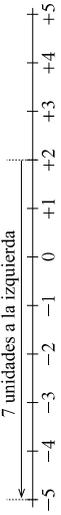
- El número que es 4 unidades mayor que +2, es el número que se ubica 4 unidades a la derecha de +2. El número es 6.



- El número que es 7 unidades menor que +4, es el número que se ubica 7 unidades a la izquierda de +4. El número es -3.



- De +2 para llegar a -5 hay 7 unidades a la izquierda, tal como se muestra en la recta numérica. -5 es 7 unidades menor que +2.

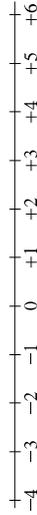


- De +2 para llegar a +6, hay 4 unidades a la derecha, tal como se muestra en la recta numérica. +6 es 4 unidades mayor que +2.



Utilizando la posición de un número y su desplazamiento de izquierda a derecha o de derecha a izquierda en la recta numérica, se pueden encontrar números mayores o menores que un número dado.

- Con base en una recta numérica, responda.
  - ¿Qué número es 2 unidades mayor que +3?
  - ¿Qué número es 4 unidades menor que +1?
  - ¿Cuántas unidades es menor -3 con respecto a +3?



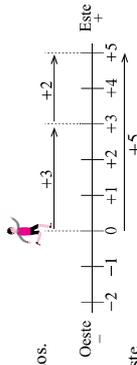
- Responda sin utilizar la recta numérica.
  - ¿Cuántas unidades es mayor +9 con respecto a +3?
  - ¿Cuántas unidades es mayor -1 con respecto a -5?
  - ¿Cuántas unidades es menor -2 con respecto a +2?

Sección 4 Suma y resta de números positivos y negativos  
Clase 1 Suma de números con signos iguales

Considere que un movimiento hacia el Este se expresa como positivo y un movimiento hacia el Oeste se expresa como negativo.

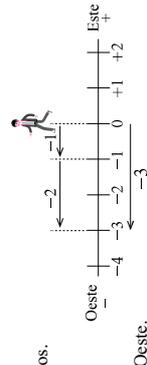
- Juan sale de su casa y avanza 3 km hacia el Este, toma un descanso y luego avanza 2 km en la misma dirección. ¿En qué posición se encuentra Juan en relación a su punto de salida? Expresa su posición utilizando números positivos o negativos.
- Mario sale de la escuela y se dirige a su casa, recorre 1 km hacia el Oeste, se detiene un momento y luego avanza 2 km en la misma dirección. ¿En qué posición se encuentra Mario en relación a su punto de salida? Expresa su posición utilizando números positivos o negativos.

- $(+3) + (+2) = +(3+2)$   
= +5



Respuesta: Juan se encuentra a 5 km hacia el Este.

- $(-1) + (-2) = -(1+2)$   
= -3



Respuesta: Mario se encuentra a 3 km hacia el Oeste.

Para sumar dos números con el mismo signo:

- Se antepone el signo común de ambos sumandos.  
 $(+3) + (+2) = +(3+2)$   
Suma
- Se suma el valor absoluto de los números.  
 $(-1) + (-2) = -(1+2)$   
Suma

Ejemplo:

- Signo común  
 $(+3) + (+5) = +(3+5)$   
Suma  
= +8
- Signo común  
 $(-3) + (-5) = -(3+5)$   
Suma  
= -8

- Complete los espacios expresados como  $\bigcirc$  con los signos y como  $\square$  con los números que corresponden.

- $(+3) + (+4) = \bigcirc(\square) + \square$   
=  $\bigcirc\square$
- $(-6) + (-1) = \bigcirc(\square) + \square$   
=  $\bigcirc\square$

2. Calcule las siguientes expresiones.

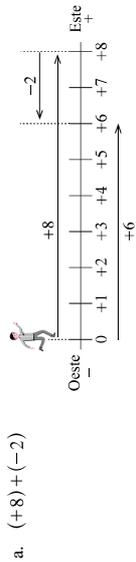
- $(+4) + (+6)$
- $(-2) + (-5)$
- $(+2) + (+7)$
- $(-8) + (-4)$
- $(+8) + (+2)$
- $(-6) + (-8)$
- $(+6) + (+9)$
- $(-9) + (-4)$
- $(+5) + (+6)$
- $(-7) + (-3)$
- $(+6) + (+7)$
- $(-8) + (-9)$

**Sección 4 Suma y resta de números positivos y negativos**  
**Clase 2 Suma de números con signos diferentes**



Considere que un movimiento hacia el Este se expresa como positivo y un movimiento hacia el Oeste se expresa como negativo.

- Carlos sale del parque y viaja 8 km hacia el Este, descansa y luego regresa 2 km hacia el Oeste. ¿En qué dirección y posición se encuentra Carlos a partir de su salida del parque?
- Karina sale de su casa y avanza 3 km hacia el Este, descansa y luego regresa 7 km hacia el Oeste. ¿En qué dirección y posición se encuentra Karina a partir de la salida de su casa?



Compruebe la respuesta gráfica restando los valores absolutos de los números. Reste el número con menor valor absoluto del número con mayor valor absoluto.

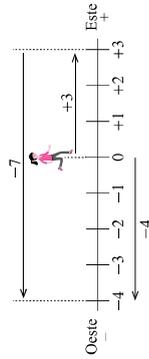
$$(+8) + (-2) = +(8 - 2)$$

$$= +6$$

$$|+8| > |-2|.$$

Respuesta: Carlos se encuentra a +6 km del parque.

b.  $(+3) + (-7)$



$$(+3) + (-7) = -(7 - 3)$$

$$= -4$$

$$|-7| > |+3|.$$

Respuesta: Karina se encuentra a -4 km de su casa.



Para sumar dos números enteros con signos diferentes:

- Paso 1. Se escribe el signo del número con mayor valor absoluto. Signo del número con mayor valor absoluto      Signo del número con mayor valor absoluto
- Paso 2. Se resta el número con menor valor absoluto del número con mayor valor absoluto.  $(+8) + (-2) = +(8 - 2)$  Resto       $(+3) + (-7) = -(7 - 3)$  Resto

Ejemplo:

- Signo del número con mayor valor absoluto  $(-9) + (+4) = -(9 - 4)$  Resto  $= -5$
- Signo del número con mayor valor absoluto  $(-3) + (+5) = +(5 - 3)$  Resto  $= +2$



1. Complete los espacios expresados como  $\bigcirc$  con los signos y como  $\square$  con los números que corresponden.

a.  $(+3) + (-4) = \bigcirc(\square) - \square$       b.  $(-1) + (+4) = \bigcirc(\square) - \square$   
 $= \bigcirc \square$        $= \bigcirc \square$

2. Calcule las siguientes expresiones.

- $(+5) + (-2)$
- $(-6) + (+5)$
- $(+7) + (-9)$
- $(-4) + (+8)$
- $(+6) + (-3)$
- $(-8) + (+2)$
- $(+3) + (-9)$
- $(+6) + (-6)$
- $(-7) + (+7)$
- $(-7) + (+4)$
- $(+2) + (-9)$
- $(-7) + (+6)$

Sección 4 Suma y resta de números positivos y negativos  
Clase 4 Suma de fracciones

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(-\frac{6}{5}) + (+\frac{3}{5})$   
b.  $(+\frac{5}{2}) + (-\frac{7}{3})$

Utilice el mismo procedimiento de cálculo que en los números enteros.

- a.  $(-\frac{6}{5}) + (+\frac{3}{5}) = -(\frac{6}{5} - \frac{3}{5}) = -\frac{3}{5}$   
b.  $(+\frac{5}{2}) + (-\frac{7}{3}) = (+\frac{3 \times 5}{2 \times 3}) + (-\frac{2 \times 7}{2 \times 3}) = (+\frac{15}{6}) + (-\frac{14}{6}) = +(\frac{15}{6} - \frac{14}{6}) = +\frac{1}{6}$

Para sumar fracciones con diferente denominador, se buscan fracciones equivalentes y se calcula como fracciones con igual denominador.

Para sumar dos fracciones con signos diferentes:

- Paso 1. Se escribe el signo del número mayor en valor absoluto.  
Paso 2. Se resta el número menor en valor absoluto del número mayor en valor absoluto.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (-\frac{3}{4}) + (+\frac{5}{6}) &= (-\frac{3 \times 3}{3 \times 4}) + (+\frac{2 \times 5}{2 \times 6}) \\ &= (-\frac{9}{12}) + (+\frac{10}{12}) \\ &= +(\frac{10}{12} - \frac{9}{12}) \\ &= +\frac{1}{12} \end{aligned}$$

¡Cuidado! Los signos “=” deben quedar en la misma columna.

$$\begin{aligned} (-\frac{3}{4}) + (+\frac{5}{6}) &= (-\frac{3 \times 3}{3 \times 4}) + (+\frac{2 \times 5}{2 \times 6}) \\ &= (-\frac{9}{12}) + (+\frac{10}{12}) \\ &= +(\frac{10}{12} - \frac{9}{12}) \\ &= +\frac{1}{12} \end{aligned}$$



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(-\frac{7}{3}) + (+\frac{5}{3})$  b.  $(+\frac{3}{4}) + (-\frac{1}{3})$  c.  $(+\frac{1}{5}) + (-\frac{3}{5})$  d.  $(-\frac{1}{4}) + (+\frac{3}{8})$   
e.  $(+\frac{5}{7}) + (-\frac{1}{6})$  f.  $(+\frac{2}{5}) + (-\frac{4}{5})$  g.  $(-\frac{1}{2}) + (+\frac{1}{5})$  h.  $(-\frac{4}{7}) + (+\frac{1}{3})$

Sección 4 Suma y resta de números positivos y negativos  
Clase 3 Suma de números decimales

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(-4.5) + (+1.3)$   
b.  $(+2.7) + (-1.4)$

Utilice el mismo procedimiento de cálculo que en los números enteros.

- a.  $(-4.5) + (+1.3) = -(4.5 - 1.3) = -3.2$   
b.  $(+2.7) + (-1.4) = +(2.7 - 1.4) = +1.3$

En forma vertical, el punto decimal debe estar en la misma columna.

$$\begin{array}{r} 4.5 \\ -1.3 \\ \hline 3.2 \end{array}$$

El cálculo en forma decimal que está a la izquierda es el cálculo dentro de paréntesis de la expresión original.

$$\begin{array}{r} 2.7 \\ -1.4 \\ \hline 1.3 \end{array}$$



Para sumar dos números decimales con signos diferentes:

- Paso 1. Se escribe el signo del número mayor en valor absoluto.  
Paso 2. Se resta el número menor en valor absoluto del número mayor en valor absoluto.

Ejemplo:

- a.  $(-3.2) + (+6.5) = +(6.5 - 3.2) = +3.3$   
b.  $(+3.2) + (-6.5) = -(6.5 - 3.2) = -3.3$

1. Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(-5.3) + (+4.1)$  b.  $(+2.8) + (-1.3)$  c.  $(-2.1) + (+6.9)$  d.  $(+5.4) + (-8.5)$

2. Una con una línea las expresiones cuya respuesta sea la misma.

- $(-3.5) + (+5.9)$
- $(-1.2) + (+7.7)$
- $(+8.9) + (-2.4)$
- $(+6.5) + (-8.7)$
- $(+5.1) + (-9.9)$
- $(-5.2) + (+7.6)$
- $(-5.9) + (+2.2)$
- $(+4.1) + (-7.8)$
- $(-6.3) + (+4.1)$
- $(-6.9) + (+2.1)$



Sección 4 Suma y resta de números positivos y negativos  
Clase 8 Resta de fracciones

Calcule las siguientes expresiones.

a.  $(+\frac{1}{5}) - (-\frac{2}{3})$   
b.  $(+\frac{2}{3}) - (+\frac{7}{6})$

a.  $(+\frac{1}{5}) - (-\frac{2}{3}) = (+\frac{1}{5}) + (+\frac{2}{3})$   
 $= +(\frac{1}{5} + \frac{2}{3})$   
 $= +\frac{13}{15}$

Se cambia la resta a una suma y el signo del sustraendo.

b.  $(+\frac{2}{3}) - (+\frac{7}{6}) = (+\frac{2 \times 2}{2 \times 3}) - (+\frac{1 \times 7}{1 \times 6})$   
 $= (+\frac{4}{6}) - (+\frac{7}{6})$   
 $= (+\frac{4}{6}) + (-\frac{7}{6})$   
 $= -(\frac{7}{6} - \frac{4}{6})$   
 $= -\frac{3}{6}$   
 $= -\frac{1}{2}$

Se encuentra el denominador común de 3 y 6, utilizando el MCM.

Se cambia la resta a una suma y el signo del sustraendo.

Restar un número positivo o negativo es equivalente a la suma del opuesto del mismo número.

Ejemplo:

a.  $(+7.8) - (+3.5) = (+7.8) + (-3.5)$   
 $= +(7.8 - 3.5)$   
 $= +4.3$   
b.  $(-4.7) - (-2.2) = (-4.7) + (+2.2)$   
 $= -(4.7 - 2.2)$   
 $= -2.5$

Calcule las siguientes expresiones.

a.  $(+3.2) - (+4.5)$   
b.  $(+3.6) - (-6.3)$   
c.  $(-4.6) - (-2.5)$   
d.  $(-2.8) - (+1.1)$   
e.  $(+4.4) - (+8.5)$   
f.  $(+6.7) - (-3.2)$   
g.  $(-5.7) - (-1.3)$   
h.  $(-7.4) - (+2.2)$   
i.  $(+7.5) - (+3.5)$   
j.  $(-9.3) - (-5.7)$   
k.  $(+5.5) - (+3.1)$   
l.  $(-8.6) - (-4.3)$



Calcule las siguientes expresiones.

a.  $(+\frac{4}{7}) - (-\frac{3}{7})$   
b.  $(+\frac{2}{3}) - (+\frac{1}{2})$   
c.  $(-\frac{8}{7}) - (-\frac{4}{21})$   
d.  $(+\frac{2}{5}) - (-\frac{1}{3})$   
e.  $(+\frac{1}{4}) - (+\frac{5}{6})$   
f.  $(-\frac{3}{4}) - (-\frac{1}{2})$   
g.  $(+\frac{4}{3}) - (-\frac{7}{9})$   
h.  $(-\frac{2}{5}) - (+\frac{3}{10})$

Sección 4 Suma y resta de números positivos y negativos  
Clase 10 Suma y resta combinadas sin paréntesis (1)



Cuando se calcula una expresión combinada de suma y resta, se transforma a una expresión solo de suma.

$$(+2) + (-8) - (+3) = (+2) + (-8) + (-3)$$

En la expresión solo de suma,  $(+2) + (-8) + (-3)$ , a los números  $+2$ ,  $-8$  y  $-3$  se les llama **términos** de la expresión.

La expresión  $(+2) + (-8) + (-3)$  se puede escribir como  $2 - 8 - 3$  usando solo sus términos.

Una expresión se puede representar solo por sus términos sin los signos de suma y paréntesis. Si el primer término es un número positivo, el signo positivo se puede quitar.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{a. } (+4) - (+6) - (-1) &= (+4) + (-6) + (+1) \\ &= 4 - 6 + 1 \end{aligned}$$

$+4$ ,  $-6$  y  $+1$  son los términos de la expresión  $(+4) - (+6) - (-1)$ .

$$\begin{aligned} \text{b. } (-7) - (-5) + (-9) &= (-7) + (+5) + (-9) \\ &= -7 + 5 - 9 \end{aligned}$$

$-7$ ,  $+5$  y  $-9$  son los términos de la expresión  $(-7) - (-5) + (-9)$ .



1. Encuentre los términos de las siguientes expresiones.

- a.  $(+4) + (-7) - (+6)$
- b.  $(-5) - (-8) + (-3)$
- c.  $(+9) - (+1) - (+2)$
- d.  $(-8) - (-2) - (-6)$

2. Represente las siguientes expresiones sin paréntesis.

- a.  $(+6) - (+7) + (-4)$
- b.  $(-3) - (+4) - (-8)$
- c.  $(+1) + (-9) - (-3)$
- d.  $(-7) - (+5) + (-2)$
- e.  $(+5) - (-2) - (-6)$
- f.  $(-3) + (+1) - (-4)$

Sección 4 Suma y resta de números positivos y negativos  
Clase 9 Resta con cero en el minuendo o sustraendo



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $0 - (-5)$
- b.  $(-4) - 0$



a. Al restar un número de cero:

$$0 - (-5) = 0 + (+5) \quad \text{Se cambia la resta a una suma y el signo del sustraendo.}$$

$$= +5$$

b. Al restar cero de un número:

$$(-4) - 0 = -4$$



Restar un número positivo o negativo es equivalente a la suma del opuesto del mismo número.

El resultado de restar cero de un número es el mismo número.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{a. } 0 - (+3) &= 0 + (-3) \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 0 - (-3) &= 0 + (+3) \\ &= +3 \end{aligned}$$

$$\text{c. } (-3) - 0 = -3$$



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $0 - (-7)$
- b.  $(-2) - 0$
- c.  $0 - (+6)$
- d.  $(+4) - 0$
- e.  $0 - (-9)$
- f.  $(-5) - 0$
- g.  $0 - (+8)$
- h.  $(+5) - 0$
- i.  $0 - (-10)$
- j.  $(-11) - 0$

Sección 4 Suma y resta de números positivos y negativos  
Clase 12 Suma y resta combinadas sin paréntesis (3)

Calcule la siguiente expresión.

$$6 - 2 + (-1) - (-4)$$

$$6 - 2 + (-1) - (-4) = 6 - 2 + (-1) + (+4)$$

Se cambia la resta a una suma y el signo del sustraendo.

$$= 6 - 2 - 1 + 4$$

$$= 6 + 4 - 2 - 1$$

$$= 10 - 3$$

$$= 7$$

Se suprimen los paréntesis y se aplica la propiedad conmutativa.

Para calcular expresiones que incluyen paréntesis, primero se suprimen los paréntesis y luego se realizan los cálculos.

Ejemplo:

$$-2 - (-6) + (-5) - 4 = -2 + (+6) + (-5) - 4$$

$$= -2 + 6 - 5 - 4$$

$$= 6 - 2 - 5 - 4$$

$$= 6 - 11$$

$$= -5$$

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $4 - 5 + (-3) - (-1)$
- b.  $-3 - (-2) + (-7) - 5$
- c.  $6 + (-2) - (-4) + 3$
- d.  $-2 + (-8) - (-3) - 1$
- e.  $5 - (-4) - (-7) - 6$
- f.  $-8 - (-4) - (-5) - 7$
- g.  $7 - 6 - (-2) - (-5)$
- h.  $-9 - (-5) - (-2) + 7$

Sección 4 Suma y resta de números positivos y negativos  
Clase 11 Suma y resta combinadas sin paréntesis (2)

Calcule la siguiente expresión.

$$1 - 3 + 6 - 2$$

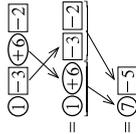
Esta expresión se representa como la suma de los términos, es decir:

$$1 - 3 + 6 - 2 = (+1) + (-3) + (+6) + (-2)$$

La expresión se puede calcular de la siguiente forma.

$$1 - 3 + 6 - 2 = 1 + 6 - 3 - 2$$

Se cambia el orden usando la propiedad conmutativa.



$$= 7 - 5$$

Se encuentra la suma de los números positivos y negativos separadamente.

$$= 2$$

Se encuentra el resultado final de la expresión.

Propiedad conmutativa:

$$\bigcirc + \square = \square + \bigcirc$$

Propiedad asociativa:

$$(\bigcirc + \square) + \triangle = \bigcirc + (\square + \triangle)$$

Para calcular una expresión de suma y resta:

1. Ordene los términos de la expresión para que los términos positivos estén primero y seguidos por los términos negativos, usando la propiedad conmutativa.
2. Encuentre la suma de los números positivos y negativos separadamente, usando la propiedad asociativa.
3. Encuentre el resultado final de la expresión.

Ejemplo:

$$a. -2 + 8 + 6 - 3 = 8 + 6 - 2 - 3$$

$$= 14 - 5$$

$$= 9$$

$$b. -3 + 9 - 1 - 4 = 9 - 3 - 1 - 4$$

$$= 9 - 8$$

$$= 1$$

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $8 - 7$
- b.  $-2 + 5$
- c.  $3 - 5 + 2$
- d.  $-4 + 9 - 1$
- e.  $3 - 6 + 7 - 2$
- f.  $-2 + 5 + 6 - 4$

Sección 5 Multiplicación de números positivos y negativos  
Clase 2 Multiplicación de un número negativo y un número positivo

Observe los siguientes cálculos y complete los espacios.

- (+4) × (+2) = +8  
 (+3) × (+2) = +6  
 (+2) × (+2) = +4  
 (+1) × (+2) = +2  
 0 × (+2) =   
 (-1) × (+2) =   
 (-2) × (+2) =   
 (-3) × (+2) =   
 (-4) × (+2) =

Se observa que los valores van disminuyendo de dos en dos. Siguiendo esta secuencia, se presentan los siguientes resultados.

- (+4) × (+2) = +8  
 (+3) × (+2) = +6  
 (+2) × (+2) = +4  
 (+1) × (+2) = +2  
 0 × (+2) = 0  
 (-1) × (+2) = -2  
 (-2) × (+2) = -4  
 (-3) × (+2) = -6  
 (-4) × (+2) = -8

Al multiplicar un número negativo por un número positivo, el producto es un número negativo. En este caso, se coloca el signo negativo y se encuentra el producto de los valores absolutos.

$(-) \times (+) \Rightarrow (-)$

Ejemplo:

$(-5) \times 6 = -(5 \times 6)$   
 $= -30$

1. Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(-4) \times (+4)$  b.  $(-5) \times (+8)$  c.  $(-2) \times (+6)$  d.  $(-7) \times (+3)$  e.  $(-6) \times (+5)$   
 2. Calcule las siguientes expresiones.  
 a.  $(-2) \times 9$  b.  $(-7) \times 5$  c.  $(-6) \times 8$  d.  $(-6) \times 4$  e.  $(-9) \times 9$   
 f.  $(-6) \times 6$  g.  $(-3) \times 9$  h.  $(-8) \times 7$  i.  $(-9) \times 5$  j.  $(-4) \times 7$

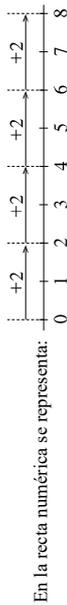
Sección 5 Multiplicación de números positivos y negativos  
Clase 1 Multiplicación de un número positivo y un número positivo o negativo

Piense en la solución de las siguientes expresiones y representélas en la recta numérica.

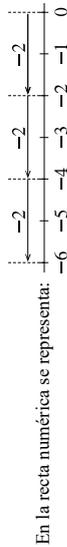
- a.  $(+4) \times (+2)$   
 b.  $(+3) \times (-2)$

Un producto es una suma abreviada. Por tanto,

a.  $(+4) \times (+2) = (+2) + (+2) + (+2) + (+2)$   
 $= +8$



b.  $(+3) \times (-2) = (-2) + (-2) + (-2)$   
 $= -6$



Al multiplicar dos números positivos, el producto es un número positivo. En este caso, se coloca el signo positivo y se encuentra el producto de los valores absolutos.

Al multiplicar un número positivo por un número negativo, el producto es un número negativo. En este caso, se coloca el signo negativo y se encuentra el producto de los valores absolutos.

Los cálculos de arriba se pueden realizar:

$(+4) \times (+2) = +(4 \times 2)$   
 $= +8$   
 $(+3) \times (-2) = -(3 \times 2)$   
 $= -6$

Ejemplo:

a.  $3 \times 5 = +(3 \times 5)$   
 $= 15$

b.  $6 \times (-8) = -(6 \times 8)$   
 $= -48$

1. Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(+4) \times (+5)$  b.  $(+9) \times (-1)$  c.  $(+2) \times (+8)$   
 d.  $(+6) \times (-4)$  e.  $(+7) \times (+8)$  f.  $(+3) \times (-9)$

2. Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $5 \times 10$  b.  $8 \times (-4)$  c.  $4 \times 6$   
 d.  $9 \times (-5)$  e.  $6 \times 7$  f.  $6 \times (-6)$   
 g.  $5 \times (-7)$  h.  $7 \times (-9)$  i.  $9 \times (-8)$

Si el número es positivo, entonces se puede omitir el signo.



Sección 5 Multiplicación de números positivos y negativos  
Clase 3 Multiplicación de dos números negativos



Observe los siguientes cálculos y complete los espacios.

$$\begin{aligned} (+3) \times (-2) &= -6 \\ (+2) \times (-2) &= -4 \\ (+1) \times (-2) &= -2 \\ 0 \times (-2) &= \square \\ (-1) \times (-2) &= \square \\ (-2) \times (-2) &= \square \\ (-3) \times (-2) &= \square \end{aligned}$$



Se observa que los valores van aumentando de dos en dos. Siguiendo esta secuencia, se presentan los resultados en la tabla que está abajo.

$$\begin{aligned} (+3) \times (-2) &= -6 && +2 \\ (+2) \times (-2) &= -4 && +2 \\ (+1) \times (-2) &= -2 && +2 \\ 0 \times (-2) &= 0 && +2 \\ (-1) \times (-2) &= +2 && +2 \\ (-2) \times (-2) &= +4 && +2 \\ (-3) \times (-2) &= +6 && +2 \end{aligned}$$



Al multiplicar dos números negativos, el producto es un número positivo. En este caso, se coloca el signo positivo y se encuentra el producto de los valores absolutos.

$$(-) \times (-) \Rightarrow (+)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (-8) \times (-5) &= +(8 \times 5) \\ &= 40 \end{aligned}$$



Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(-2) \times (-8)$
- b.  $(-4) \times (-7)$
- c.  $(-4) \times (-3)$
- d.  $(-2) \times (-5)$
- e.  $(-9) \times (-5)$
- f.  $(-3) \times (-8)$
- g.  $(-6) \times (-3)$
- h.  $(-8) \times (-4)$
- i.  $(-9) \times (-7)$
- j.  $(-3) \times (-7)$
- k.  $(-5) \times (-4)$
- l.  $(-7) \times (-6)$
- m.  $(-6) \times (-8)$
- n.  $(-3) \times (-9)$
- o.  $(-9) \times (-6)$

Sección 5 Multiplicación de números positivos y negativos  
Clase 4 Cálculo mental de estimación de multiplicación



Con base en  $5.4 \times (-3.7)$ :

- a. Calcule la expresión mentalmente, aproximando cada uno de los factores a un número entero.
- b. Calcule la expresión utilizando calculadora.
- c. Compare los resultados obtenidos en el inciso a y b.

Al proceso de encontrar un número entero cercano al número decimal dado se le llama **aproximación** de un número decimal a un número entero.



- a. 5.4 se aproxima a 5.  
-3.7 se aproxima a -4.  
Por tanto,  $5 \times (-4) = -20$ .
- b.  $5.4 \times (-3.7) = -19.98$

5.4 se ubica más cerca del 5 que del 6.  
-3.7 se ubica más cerca del -4 que del -3.



- c. El resultado del inciso a es:  
 $5 \times (-4) = -20$   
El resultado del inciso b es:  
 $5.4 \times (-3.7) = -19.98$   
Entonces, los resultados del inciso a y b son aproximadamente iguales.



A obtener el resultado de una expresión matemática utilizando aproximación se le llama **estimación**.

Para estimar un producto de números decimales:

- Paso 1. Se aproxima cada uno de los factores a un número entero.
- Paso 2. Se multiplican los números aproximados.

Ejemplo:

Encuentre la estimación de  $(-4.2) \times 6.7$ .

- 4.2 se aproxima a -4.
- 6.7 se aproxima a 7.

$$\begin{aligned} (-4) \times 7 &= -(4 \times 7) \\ &= -28 \end{aligned}$$

Por tanto, la estimación de  $(-4.2) \times 6.7$  es  $-28$ .



Encuentre la estimación de las siguientes expresiones.

- a.  $5.2 \times (-4.9)$
- b.  $(-3.2) \times 7.1$
- c.  $(-8.7) \times (-2.2)$
- d.  $5.8 \times (-6.4)$
- e.  $11.4 \times (-2.9)$
- f.  $(-4.2) \times 13.8$
- g.  $(-3.6) \times (-10.4)$
- h.  $12.3 \times (-2.2)$

Sección 6 División de números positivos y negativos  
Clase 2 División de números decimales

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(-1.6) \div (-0.8)$   
b.  $3.6 \div (-0.9)$

- a.  $(-1.6) \div (-0.8) = + (1.6 \div 0.8)$   
 $= 2$   
Se determina el signo.  
Se encuentra el cociente de los valores absolutos.

- b.  $3.6 \div (-0.9) = - (3.6 \div 0.9)$   
 $= -4$   
Se determina el signo.  
Se encuentra el cociente de los valores absolutos.

Al dividir números decimales con el mismo signo, el cociente es un número positivo. En este caso, se coloca el signo positivo y se encuentra el cociente de los valores absolutos.

Al dividir números decimales con diferente signo, el cociente es un número negativo. En este caso, se coloca el signo negativo y se encuentra el cociente de los valores absolutos.

Ejemplo:

a.  $(-6.3) \div (-2.1) = + (6.3 \div 2.1)$   
 $= 3$

b.  $(-5.6) \div 0.7 = - (5.6 \div 0.7)$   
 $= -8$

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(-4.2) \div (-2.1)$       b.  $9.3 \div (-3.1)$       c.  $2.5 \div 0.5$   
d.  $(-4.5) \div 0.5$       e.  $(-3.6) \div (-1.8)$       f.  $2.4 \div (-0.6)$   
g.  $(-4.8) \div 1.2$       h.  $(-7.2) \div (-2.4)$       i.  $9.6 \div (-3.2)$   
j.  $(-8.1) \div 0.9$       k.  $(-5.4) \div (-1.8)$       l.  $9.4 \div (-4.7)$   
m.  $6.3 \div (-0.3)$       n.  $8.2 \div (-4.1)$       o.  $7.5 \div (-1.5)$

Sección 6 División de números positivos y negativos  
Clase 1 División de números positivos y negativos

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(+8) \div (+2)$   
b.  $(+8) \div (-2)$   
c.  $(-8) \div (+2)$   
d.  $(-8) \div (-2)$

Para calcular la división de números negativos realice el mismo procedimiento que en los números positivos, teniendo cuidado con el signo.

- a.  $(+8) \div (+2) = +4$       porque  $(+4) \times (+2) = +8$   
b.  $(+8) \div (-2) = -4$       porque  $(-4) \times (-2) = +8$   
c.  $(-8) \div (+2) = -4$       porque  $(-4) \times (+2) = -8$   
d.  $(-8) \div (-2) = +4$       porque  $(+4) \times (-2) = -8$

Para dividir números con el mismo signo:

$(+) \div (+) \rightarrow (+)$   
 $(-) \div (-) \rightarrow (+)$

Para dividir números con diferente signo:

$(+) \div (-) \rightarrow (-)$   
 $(-) \div (+) \rightarrow (-)$

Paso 1. Se coloca el signo positivo.  
Paso 2. Se encuentra el cociente de los valores absolutos.

Paso 1. Se coloca el signo negativo.  
Paso 2. Se encuentra el cociente de los valores absolutos.

Ejemplo:

a.  $6 \div 3 = + (6 \div 3)$   
 $= 2$

b.  $(-6) \div (-3) = + (6 \div 3)$   
 $= 2$

c.  $(-6) \div 3 = - (6 \div 3)$   
 $= -2$

d.  $6 \div (-3) = - (6 \div 3)$   
 $= -2$

1. Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(-18) \div (-3)$       b.  $(+49) \div (-7)$       c.  $(-10) \div (+5)$   
d.  $(-80) \div (-10)$       e.  $(+45) \div (-5)$       f.  $(-20) \div (+2)$   
2. Calcule las siguientes expresiones.  
a.  $(-9) \div (-3)$       b.  $24 \div (-6)$       c.  $75 \div 15$   
d.  $(-81) \div (-9)$       e.  $35 \div (-7)$       f.  $(-36) \div (-4)$   
g.  $60 \div (-12)$       h.  $(-100) \div (-10)$       i.  $64 \div (-8)$



## Sección 6 División de números positivos y negativos

### Clase 5 Cálculo mental de estimación de división

Con base en  $(-8.4) \div 2.3$ :

- Calcule mentalmente, aproximando el dividendo y el divisor a un número entero.
- Calcule utilizando calculadora.
- Compare los resultados obtenidos en el inciso a y b.

a.  $-8.4$  se aproxima a  $-8$ .  
 $2.3$  se aproxima a  $2$ .  
 Por tanto,  $(-8) \div 2 = -(8 \div 2)$   
 $= -4$

b.  $(-8.4) \div 2.3 = -3.6521739\dots$

c. El resultado del inciso a es:  
 $(-8) \div 2 = -4$

El resultado del inciso b es:  
 $(-8.4) \div 2.3 = -3.6521739\dots$

Entonces, los resultados del inciso a y b son aproximadamente iguales.

$-8.4$  se ubica más cerca del número  $-8$  que del  $-9$ .  
 $2.3$  se ubica más cerca del número  $2$  que del  $3$ .



## Sección 7 Operaciones combinadas de números positivos y negativos

### Clase 1 Multiplicación y división de números positivos y negativos combinadas

Calcule la siguiente expresión.

$$(-27) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div (-9)$$

Forma 1.

Calcule de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} & (-27) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div (-9) \\ & = + \left( \frac{{}^{127} 27 \times 2}{3} \right) \div (-9) \\ & = 18 \div (-9) \\ & = -2 \end{aligned}$$

Forma 2.

Cambie la división a multiplicación utilizando el recíproco de  $-9$  y calcule.

$$\begin{aligned} & (-27) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \div (-9) \\ & = (-27) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{9}\right) \\ & = - \left( \frac{{}^{127} 27 \times 2 \times 1}{3 \times 9} \right) \\ & = -2 \end{aligned}$$

$$(-) \times (-) \times (-) \Rightarrow (-)$$



Para simplificar fracciones se divide el numerador y el denominador entre el mismo número.

$$\frac{{}^4 8}{{}^3 24} \times \frac{{}^1 2}{{}^3 6} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$



Para estimar el cociente de números decimales:

Paso 1. Se aproxima el dividendo y el divisor a un número entero.  
 Paso 2. Se dividen los números aproximados.

Encuentre la estimación de las siguientes expresiones.

- $(-7.8) \div 4.1$
- $(-9.3) \div 2.7$
- $(-10.3) \div (-5.2)$
- $(-11.9) \div 5.8$
- $15.2 \div (-3.3)$
- $(-17.9) \div 9.2$
- $(-26.8) \div (-2.8)$
- $(-59.7) \div 3.1$

Para calcular una expresión matemática con multiplicación y división de fracciones:

Paso 1. Se cambia la división a multiplicación, utilizando el recíproco del divisor.  
 Paso 2. Se colocan los signos.  
 Paso 3. Se calcula.

Calcule las siguientes expresiones.

- $(-3) \times 5 \div (-12)$
- $8 \div \left(-\frac{14}{5}\right) \times (-7)$
- $(-6) \div \frac{3}{5} \times 10$
- $(-3) \times 4 \div 24$
- $18 \div \left(-\frac{9}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right)$
- $\frac{3}{5} \div \left(-\frac{3}{10}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$

Sección 7 Operaciones combinadas de números positivos y negativos  
Clase 2 Potencia con números negativos

Escriba en forma de producto y calcule.

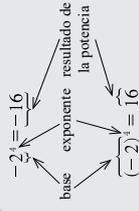
a.  $-2^4$

b.  $(-2)^4$

a.  $-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2)$   
 $= -16$

b.  $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$   
 $= 16$

$-2^4$  y  $(-2)^4$  son parecidos pero representan productos diferentes.



En una potencia:

1. Si la base no está entre paréntesis, entonces se copia el signo y el exponente afecta solo al número.
2. Si la base está entre paréntesis, entonces el exponente afecta a todo lo que está dentro del paréntesis, es decir, al signo y al número.

Ejemplo:

a.  $-4^2 = -(4 \times 4)$

$= -16$

b.  $(-4)^2 = (-4) \times (-4)$

$= 16$

c.  $(-3)^2 = (-3) \times (-3)$

$= 9$

d.  $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= -27$

Si el exponente es par, el resultado de la potencia es positivo.

Si el exponente es impar, el resultado de la potencia es negativo.

Calcule las siguientes expresiones.

a.  $-6^2$

c.  $-5^3$

e.  $-8^2$

g.  $-3^4$

i.  $-5^5$

b.  $(-3)^4$

d.  $(-7)^2$

f.  $(-2)^5$

h.  $(-9)^3$

j.  $(-4)^3$

Sección 7 Operaciones combinadas de números positivos y negativos  
Clase 3 Orden de operaciones (1)

Calcule las siguientes expresiones.

a.  $3 - (-2) \times 5$

b.  $5 \times (-12) + 14 \div 7$

c.  $-4 + (-5) \times (-2)^3$

a.  $3 - (-2) \times 5$   
 $= 3 - (-10)$   
 $= 3 + 10$   
 $= 13$

Se multiplica  $(-2) \times 5$ .

Se cambia la resta a una suma y el signo del sustraendo.

Se suma.

b.  $5 \times (-12) + 14 \div 7$

$= -60 + 2$

$= -58$

Se multiplica  $5 \times (-12)$  y se divide  $14 \div 7$ .

Se suma.

c.  $-4 + (-5) \times (-2)^3$

$= -4 + (-5) \times (-8)$

$= -4 + 40$

$= 36$

Se calcula  $(-2)^3$ .

Se multiplica  $(-5) \times (-8)$ .

Se suma.

Para calcular una expresión que combina suma, resta, multiplicación, división y potencia:

Paso 1. Se calculan las potencias.

Paso 2. Se multiplica y se divide de izquierda a derecha.

Paso 3. Se suma y se resta de izquierda a derecha.

Calcule las siguientes expresiones.

a.  $(-2) \times 5 - 6 \div (-3)$

c.  $-5 - (-3) \times 4$

d.  $4 - 6 \div 3 \times 5 + 2$

e.  $3^2 + 5 \times 8 \div 2$

f.  $3 - (-2) \times 5 - (-10)$

g.  $5 \div (-5) - 2^3 \times 3$

h.  $(-7) \times 1 + (-9) \div 3$

i.  $12 - 4^2 \div (-2) \times 4$

**Sección 7 Operaciones combinadas de números positivos y negativos**  
**Clase 4 Orden de operaciones (2)**

Calcule las siguientes expresiones.

a.  $(-4) \times (-7 + 9) + 19$   
b.  $8 + [12 \div (-2 \times 3)] - 5$

a.  $(-4) \times (-7 + 9) + 19$

$= (-4) \times (+2) + 19$   
 $= -8 + 19$   
 $= 11$

Se operan los números dentro del paréntesis  $(-7 + 9)$ .  
Se multiplica  $(-4) \times (+2)$ .  
Se suma.

b.  $8 + [12 \div (-2 \times 3)] - 5$   
 $= 8 + [12 \div (-6)] - 5$   
 $= 8 + (-2) - 5$   
 $= 8 - 2 - 5$   
 $= 6 - 5$   
 $= 1$

Se operan los números dentro del paréntesis  $(-2 \times 3)$ .  
Se operan los números dentro del corchete  $[12 \div (-6)]$ .  
Se suprimen los paréntesis.



Quando una expresión incluye diversos signos de agrupación, el orden de cálculo es:

- Paso 1. Se resuelven primero las operaciones indicadas dentro de los paréntesis ( ), luego los corchetes [ ].  
Paso 2. Se multiplica y se divide de izquierda a derecha.  
Paso 3. Se suma y se resta de izquierda a derecha.



Calcule las siguientes expresiones.

a.  $(-5 + 10) \times 3 - 4$     b.  $4 \times [-2 - (5 - 4)]$     c.  $7 + (12 - 4) \times 3$   
d.  $5 \times [-4 + (2 - 8)]$     e.  $15 \div (3 - 6) \times 2$     f.  $-5 + [-3 \times (2 - 5)]$   
g.  $(-15 - 6) \div 3 \times (-2)$     h.  $36 \div [2 \times (-2 - 4)]$     i.  $9 \times (-5 + 2) \div (-3)$

**Ejercitación A**

1. Clasifique los siguientes números en primos y compuestos.  
11, 21, 39, 42, 59, 77
2. Escriba la descomposición en factores primos de los siguientes números compuestos.  
18, 48, 75, 90, 100, 135

3. Encuentre el MCM de los siguientes números.  
2 y 5, 5 y 15, 9 y 12

4. Encuentre el MCD de los siguientes números.  
5 y 15, 9 y 12

5. Calcule las siguientes expresiones.  
a.  $2.8 + 5.1$     b.  $6.6 - 4.3$     c.  $10.2 + 4.73$     d.  $19.3 - 5.16$

6. Calcule las siguientes expresiones.  
a.  $3.7 \times 2.4$     b.  $7.8 \div 1.3$     c.  $2.33 \times 5.1$     d.  $6.56 \div 4.1$

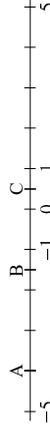
7. Calcule las siguientes expresiones.  
a.  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$     b.  $\frac{4}{5} - \frac{1}{2}$     c.  $\frac{3}{7} + \frac{1}{14}$     d.  $\frac{5}{26} - \frac{5}{13}$

8. Calcule las siguientes expresiones.  
a.  $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$     b.  $\frac{3}{8} \div \frac{2}{5}$     c.  $\frac{4}{9} \times 4$     d.  $\frac{5}{6} \div 7$

9. Expresé la medida de temperatura utilizando números positivos y negativos.

a.  $5^\circ\text{C}$  arriba de  $0^\circ\text{C}$     b.  $10^\circ\text{C}$  debajo de  $0^\circ\text{C}$

10. Escriba el número que corresponde a cada letra en la recta numérica.



11. Expresé con un número positivo o negativo cada diferencia respecto a la cantidad de referencia.  
a. 6 cm más corto de la "longitud ideal".  
b. 4 min antes del "tiempo actual".

12. Compare los siguientes pares de números y escriba  $>$  o  $<$  donde corresponda.

a.  $2 \square -3$     b.  $-5 \square -8$     c.  $-0.5 \square 0$     d.  $-\frac{1}{2} \square -\frac{1}{6}$

13. Encuentre el valor absoluto de los siguientes números.

a.  $-9$     b.  $+2$     c.  $-4.8$     d.  $+\frac{3}{7}$

14. Calcule las siguientes expresiones.

a.  $(-3) + (-6)$     b.  $(+5) - (+1)$     c.  $(-4) + (+5)$     d.  $(+2) - (-4)$   
e.  $(+2) + (-7)$     f.  $(-7) - (-3)$     g.  $(+3) + (-3)$     h.  $0 - (-8)$   
i.  $(-2.6) + (+1.3)$     j.  $(-3.3) - (+6.5)$     k.  $(+\frac{2}{5}) + (-\frac{1}{5})$     l.  $(+\frac{5}{3}) - (+\frac{3}{2})$   
m.  $(-6) + (-3) + (+2)$     n.  $(+2) + (-4) - (-5)$     o.  $(-7) + (-1) - (+4) - (-4)$

15. Calcule las siguientes expresiones.

a.  $3 \times (-2)$     b.  $(-9) \div 3$     c.  $(-4) \times (-5)$     d.  $(-6) \div (-2)$

16. Calcule las siguientes expresiones.

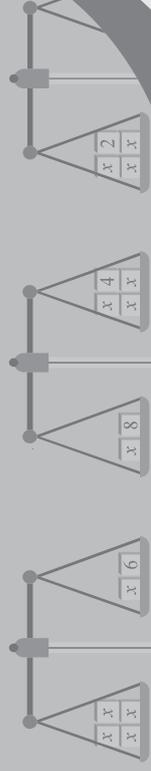
a.  $-3^2$     b.  $(-5)^3$     c.  $5 + 10 \div (-2)$     d.  $4 - 6 \times (-5)$

### Ejercitación B

- Calcule las siguientes expresiones.
  - $3.4 + 2.9$
  - $5.5 - 2.7$
  - $8.6 + 10.59$
  - $14.51 - 2.62$
- Calcule las siguientes expresiones.
  - $20 \times 0.7$
  - $4 \div 0.8$
  - $0.5 \times 2.66$
  - $2.4 \div 0.04$
- Calcule las siguientes expresiones.
  - $\frac{2}{5} + \frac{4}{15}$
  - $\frac{7}{10} - \frac{1}{6}$
  - $1 + \frac{3}{6} + \frac{4}{4}$
  - $\frac{13}{20} - \frac{1}{4}$
- Calcule las siguientes expresiones.
  - $\frac{3}{4} \times \frac{2}{9}$
  - $\frac{3}{5} \div \frac{3}{10}$
  - $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}$
  - $\frac{6}{7} \div \frac{12}{21}$
- Encuentre los números enteros que tengan como valor absoluto 2.
- El punto P, que no se muestra en la recta numérica, está a 5 unidades del punto B y a 2 unidades del punto A. ¿Qué número es el punto P?
 
- Calcule las siguientes expresiones.
  - $-2 - 4$
  - $-7 + 3$
  - $-5 + 9$
  - $-6 + 6$
  - $-5.1 + 2.9$
  - $-1.7 + 4.3$
  - $-3.4 - 6.6$
  - $-\frac{7}{2} - \frac{3}{2}$
  - $-\frac{7}{6} + \frac{8}{3}$
  - $-3 + 5 - 7$
  - $2 - 6 - 1 - 4$
  - $-5 + 8 - 7 + 9$
  - $4 + (-3) - (-6) + 5$
  - $7 - (-1) + (-2) + 8$
  - $-3 + (-6) - (-9) + 11$
- Calcule las siguientes expresiones.
  - $(-4) \times 6 \div (-8)$
  - $9 \div (-\frac{3}{5}) \times (-2)$
  - $(-\frac{3}{4}) \times (-\frac{5}{6}) \div (-\frac{15}{16})$
  - $(-\frac{2}{7}) \div \frac{4}{9} \div (-\frac{3}{14})$
  - $(-2) \times (-4) \times (-3)$
  - $40 \div (-10) \times (-5)$
  - $(-8.4) \div (-4.2)$
  - $(-\frac{3}{4}) \div \frac{2}{5}$
- Calcule las siguientes expresiones.
  - $2 \times 6 - 4 \div (-1)$
  - $2^3 - 3 \div (-10) \times (-20)$
  - $(-3)^3 - 9 - 5 \times 2$
  - $6^2 \div 2 - (-8)^2 \div 4$
  - $2 \times [-5 - (4 - 7)]$
  - $(-2.3 - 5.7) \div (-2) \times (-5)$
  - $-\frac{1}{3} + (-4 + 9) \div \frac{3}{5}$
  - $(-6.2) \div 3.1 - \frac{9}{4} \times (-\frac{8}{3})$

$:2 = 3:6 = 9:18$  Si  $a:b = c:d$ , entonces  $ad = b$

$$\div 3 \div 3$$



# Unidad 2

# Álgebra

Sección 1 Variable

Clase 1 Patrones de cálculo



Benjamín clava 4 láminas juntas, tal como se observa en la imagen.

¿Cuántos clavos se necesitan para las 4 láminas?



Al observar la imagen, la primera lámina lleva dos columnas de 3 clavos cada una, pero de la segunda hasta la cuarta lámina cada una solo necesita una columna de 3 clavos.

Construya el patrón:

1 lámina necesita  $3 + 1 \times 3 = 3 + 3 = 6$  clavos.



2 láminas necesitan  $3 + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$  clavos.



3 láminas necesitan  $3 + 3 \times 3 = 3 + 9 = 12$  clavos.



4 láminas necesitan  $3 + 4 \times 3 = 3 + 12 = 15$  clavos.



Respuesta: se necesitan 15 clavos para las 4 láminas.

El primer 3 indica los 3 clavos para el lado izquierdo de la primera lámina, los números del 1...4 indican el número de láminas, y el segundo 3 indica el número de clavos para el lado derecho de cada lámina.



El número de clavos se obtiene relacionando el número de láminas con la cantidad de clavos por lámina, y se calcula:

$$3 + (\text{número de láminas}) \times 3$$



Utilice el patrón numérico anterior para encontrar la cantidad de clavos necesarios según el número de láminas.

- a. 5 láminas                      b. 6 láminas                      c. 10 láminas

Sección 1 Variable

Clase 2 Patrones de cálculo con una variable



Pedro utiliza  $x$  láminas para terminar de techar su casa, tal como se observa en la imagen.

¿Cuántos clavos se necesitan para  $x$  láminas?



Al observar la imagen solamente la primera lámina necesita 6 clavos con dos columnas de 3 clavos cada una. De la segunda lámina en adelante ya solo necesita una columna de 3 clavos. Esto significa que el patrón es  $3 + x \times 3$  donde  $x$  es el número de láminas.

$3 + x \times 3$  también se puede expresar como  $x \times 3 + 3$ .

Respuesta: se necesitan  $x \times 3 + 3$  clavos para  $x$  láminas.

En este libro, las variables y las constantes se escriben en itálica. Por ejemplo:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $x^2$  y  $x$  son diferentes.



A la expresión  $x \times 3 + 3$  se le llama **expresión algebraica**. A una letra que representa una cantidad desconocida se le llama **variable** o **incógnita**. Una expresión algebraica combina números, variables y signos de una operación.



Resuelva los siguientes problemas.

- a. Observe el dibujo.  
El primer triángulo se construye con 3 palitos.  
Del segundo triángulo en adelante se construyen con 2 palitos más.



Represente el número de palitos que se necesitan para construir  $x$  triángulos con una expresión algebraica.

- b. Observe el dibujo.  
El primer cuadrado se construye con 4 palitos.  
Del segundo cuadrado en adelante se construyen con 3 palitos más.



Represente el número de palitos que se necesitan para construir  $m$  cuadrados con una expresión algebraica.

## Sección 1 Variable

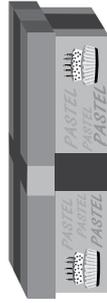
### Clase 3 Patrones de cálculo con dos variables

Cada pastel posee el mismo peso, cuyo valor es  $x$  gramos. Los pasteles se colocan en la caja como en la imagen. La caja pesa  $y$  gramos. Represente cada pregunta con una expresión algebraica.

a. ¿Cuántos gramos pesarán 5 pasteles?



b. ¿Cuál es el peso de la caja?



c. ¿Cuál es el peso total de 5 pasteles y la caja?

a. Si cada pastel pesa  $x$  gramos, entonces 5 pasteles pesarán:

$$5 \times x \text{ gramos}$$

b. Si la caja pesa  $y$  gramos, entonces 1 caja pesará:

$$1 \times y \text{ gramos}$$

c. Si los 5 pasteles pesan  $5 \times x$  gramos y la caja pesa  $1 \times y$  gramos, entonces el peso total de la caja con los 5 pasteles es:

$$5 \times x + 1 \times y \text{ gramos}$$

Una expresión algebraica consta de una o más variables.

Resuelva los siguientes problemas.

a. Juan lleva 32 piñas en un cajón. Cada piña pesa regularmente lo mismo, equivalente a  $x$  gramos, y el cajón y gramos. Represente el peso total del cajón, junto con las piñas con una expresión algebraica.

b. Ixxik compra 3 gütipiles idénticos que cuestan  $a$  quetzales cada uno y 2 pares de zapatos de la misma marca que cuestan  $b$  quetzales cada par. Represente el valor total de la compra con una expresión algebraica.

c. En la motocicleta de José van 2 personas de la misma masa corporal que pesan  $x$  libras cada una. El peso de la motocicleta es  $y$  libras. Represente el peso total con una expresión algebraica.

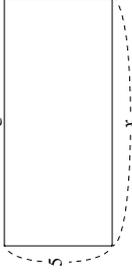
d. En la granja de Luisa hay 25 cerdos y 40 gallinas. Luisa necesita vender los animales de su granja. Ella asigna  $a$  quetzales al precio de cada cerdo y  $b$  quetzales al de cada gallina. Represente el precio total con una expresión algebraica.

## Sección 2 Expresiones algebraicas

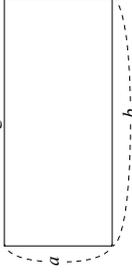
### Clase 1 Regla de multiplicación de variables y un número en una expresión algebraica

Con base en los siguientes rectángulos:

Rectángulo 1



Rectángulo 2



- Plantee una expresión algebraica para el área.
- Escriba la expresión del inciso a sin el signo “ $\times$ ”.

Rectángulo 1:

a. Aplique la fórmula: (Área) = (base)  $\times$  (altura)

$$= x \times 5$$

b. Coloque primero el número y luego la letra.

Quite el símbolo de la multiplicación “ $\times$ ”.

$$x \times 5 = 5x$$

Rectángulo 2:

a. Aplique la fórmula: (Área) = (base)  $\times$  (altura)

$$= b \times a$$

b. Quite el símbolo de la multiplicación “ $\times$ ” y ordene las variables alfabéticamente.

$$b \times a = ab$$

Para escribir una expresión algebraica de un producto:

Se omite el signo de multiplicación “ $\times$ ”.

Se coloca primero el número y después la variable.

Se ordenan las variables alfabéticamente.

Ejemplo:

a.  $c \times a = ac$

b.  $d \times (-3) \times c = -3cd$

Escriba correctamente las siguientes expresiones algebraicas.

a.  $3 \times b \times a$

b.  $x \times 4 \times y$

c.  $b \times (-5) \times c$

d.  $y \times z \times (-12)$

e.  $a \times b \times 7$

f.  $-6 \times y \times x$

g.  $-2 \times c \times b$

h.  $z \times 9 \times x$

i.  $a \times c \times 10$

Sección 2 Expresiones algebraicas  
Clase 2 Regla de multiplicación de una variable y 1 o -1 en una expresión algebraica

Escriba correctamente las siguientes expresiones algebraicas.

**P**

- a.  $1 \times x$   
b.  $(-1) \times y$

**S**

- a.  $1 \times x = x$   
b.  $(-1) \times y = -y$

$1 = +1$

**G**

Las reglas de la multiplicación de una variable y 1 o -1 en una expresión algebraica son:

En la multiplicación de una variable o expresión algebraica y 1, se omite el signo de multiplicación y el 1. Por ejemplo:  $1 \times x = 1x = x$ .

En la multiplicación de una variable o expresión algebraica y (-1), se escribe el signo negativo “-”, pero se omite el signo de multiplicación y el 1. Por ejemplo:  $(-1) \times y = -1y = -y$ .

Ejemplo:

- a.  $1 \times y \times z = yz$   
b.  $a \times (-1) \times b = -ab$   
c.  $(-1) \times (b + c) = -(b + c)$   
d.  $(x - y) \times (-1) = -(x - y)$

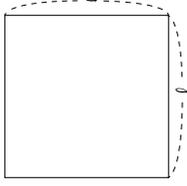
**E**

Escriba correctamente las siguientes expresiones algebraicas.

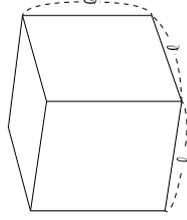
- a.  $1 \times x \times y$       b.  $b \times a \times (-1)$       c.  $x \times 1 \times y$   
d.  $(-1) \times (x - y)$       e.  $(a + b) \times (-1)$       f.  $y \times 1 \times x \times z$   
g.  $b \times (-1) \times a \times c$       h.  $(z - y) \times (-1)$       i.  $(-1) \times (a + b)$   
j.  $a \times b \times (-1) \times c$       k.  $1 \times (x - y)$       l.  $c \times b \times a \times (-1)$

Sección 2 Expresiones algebraicas  
Clase 3 Potencia de una expresión algebraica

- a. Represente el área del cuadrado con una expresión algebraica, si uno de sus lados mide  $\ell$ .



- b. Represente el volumen del cubo con una expresión algebraica, si uno de sus lados mide  $\ell$ .



a. (Área) = (lado)  $\times$  (lado) =  $\ell \times \ell = \ell^2$

b. (Volumen) = (lado)  $\times$  (lado)  $\times$  (lado) =  $\ell \times \ell \times \ell = \ell^3$

**S**

Un producto de variables del mismo valor se expresa utilizando exponentes. Un exponente expresa el número de veces que se multiplica una misma cantidad.

$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$   
n factores



A los números que se multiplican se les llama **factores**.

Ejemplo:

- a.  $m \times m \times n \times n \times n \times n = m^2 n^4$   
b.  $r \times r \times q \times q \times q \times p \times p \times p \times p = r^2 q^3 p^4$

Escriba en forma de potencia las siguientes expresiones algebraicas.

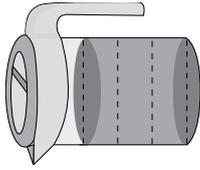
- a.  $a \times a \times a$       b.  $b \times b \times b \times c$   
c.  $b \times b \times b \times c \times c \times c \times c$       d.  $a \times a \times b \times c \times c \times c \times c \times c$   
e.  $x \times x \times x \times y \times y \times z \times z \times 3$       f.  $2 \times y \times y \times y \times y \times x \times x \times x \times x \times z \times z \times z$   
g.  $z \times z \times z \times y \times y \times y \times (-2) \times x \times x \times x$       h.  $a \times a \times a \times x \times x \times y \times y \times z \times z \times z \times (-1)$

**E**

## Sección 2 Expresiones algebraicas

### Clase 4 División de una expresión algebraica entre un número entero

**P** Juliana preparó  $x$  litros de jugo de melón y quiere repartir la misma cantidad entre sus 3 amigos.



¿Cuántos litros de jugo de melón corresponden a cada amigo?

**S** Juliana reparte  $x$  litros entre sus 3 amigos.

La cantidad de litros de jugo que corresponde a cada amigo se representa como:  $x$  litros  $\div$  3 amigos.

$$x \div 3 = \frac{x}{3} \quad \text{o} \quad x \div 3 = x \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x$$

Respuesta:  $\frac{x}{3}$  litros de jugo de melón corresponden a cada amigo.

**C** La división de una expresión algebraica se escribe en forma de fracción, omitiendo el signo “ $\div$ ”. El dividendo se convierte en el numerador de la fracción y el divisor en el denominador.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{a. } x \div (-4) &= \frac{x}{-4} = -\frac{x}{4} \quad \text{o} \quad -\frac{1}{4}x \\ \text{b. } (x+y) \div (-2) &= \frac{x+y}{-2} = -\frac{x+y}{2} \quad \text{o} \quad -\frac{1}{2}(x+y) \end{aligned}$$

- E** 1. Escribe las siguientes expresiones algebraicas omitiendo el signo “ $\div$ ”.
- $a \div 2$
  - $x \div (-5)$
  - $(x+y) \div (-3)$
  - $(a-b) \div (-6)$
2. Escribe las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo “ $\div$ ”.
- $\frac{x}{3}$
  - $-\frac{c}{2}$
  - $-\frac{1}{7}(a-b)$
  - $-\frac{1}{4}(y+z)$

## Sección 2 Expresiones algebraicas

### Clase 5 Expresiones algebraicas con multiplicación y división

**P** 1. Escribe las siguientes expresiones algebraicas sin los signos “ $\times$ ” y “ $\div$ ”.

- $x \div 2 + 3 \times b$
- $y \div 3 + a \div 2$
- $4 \times c \times c \times c + z \div 2$

2. Escribe las siguientes expresiones algebraicas con los signos “ $\times$ ” y “ $\div$ ”, sin emplear potencias.

- $2a^2 + 3b^3$
- $\frac{x}{3} + \frac{y}{2}$
- $\frac{3a}{b} - \frac{c}{2}$

**S** 1. a.  $\frac{x}{2} + 3b$       b.  $\frac{y}{3} + \frac{a}{2}$       c.  $4c^3 + \frac{z}{2}$

2. a.  $2 \times a \times a + 3 \times b \times b \times b$       b.  $x \div 3 + y \div 2$       o       $\frac{1}{3} \times x + \frac{1}{2} \times y$   
 c.  $3 \times a \div b - c \div 2$       o       $3 \times a \div b + c \div (-2)$       o       $3 \times a \times \frac{1}{b} - \frac{1}{2} \times c$

**C** Una expresión algebraica generalmente ordena las variables alfabéticamente. Cuando se expresa el producto de letras y un número, se escribe primero el número y se omite el signo “ $\times$ ”. La división de una expresión algebraica se escribe en forma de fracción omitiendo el signo “ $\div$ ”.

**E** 1. Escribe las siguientes expresiones algebraicas sin los signos “ $\times$ ” y “ $\div$ ”.

- $a \div 5 + 4 \times b$
- $x \div 6 + y \div 3$
- $7 \times b \times b \times b + c \div 5$
- $4 \times x - y \div 8$
- $3 \div a - 4 \times b \times b$
- $9 \div y + 2 \div z$

2. Escribe las siguientes expresiones algebraicas con los signos “ $\times$ ” y “ $\div$ ”.

- $3x^3 + 7y^4$
- $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$
- $\frac{5y}{z} - \frac{x}{8}$
- $\frac{4c}{a} + 6b$
- $6x^4 + \frac{y}{3}$
- $\frac{xy}{4} - 3z^2$

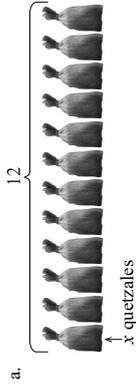
## Sección 2 Expresiones algebraicas Clase 6 Expresiones algebraicas en la vida cotidiana (1)

**P**

- María compró 12 chuchitos a  $x$  quetzales cada uno. Represente su vuelto con una expresión algebraica si pagó con un billete de 50 quetzales.
- Un terreno tiene un largo de  $7x$  km y ancho de  $x$  km. Represente el área del terreno con una expresión algebraica.

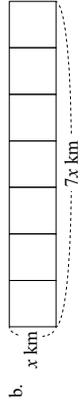
**S**

Para representar una situación concreta con una expresión algebraica, se debe identificar el coeficiente y la variable.



El precio de 12 chuchitos a  $x$  quetzales cada uno fue de  $12x$ . Si pagó con un billete de 50 quetzales, entonces el vuelto fue  $50 - 12x$  quetzales.

Respuesta:  $50 - 12x$  quetzales.



El largo del terreno es  $7x$  km y el ancho del terreno es  $x$  km. El área del terreno se calcula como  $7x \times x$ .

Respuesta:  $7x^2$  km<sup>2</sup>.

**C**

Una expresión algebraica es una representación matemática de situaciones de la vida cotidiana, que utiliza números, variables y signos de operación.

**E**

Represente las siguientes situaciones con expresiones algebraicas.

- En una canasta hay 20 frutas en total, incluyendo naranjas y manzanas. Si hay  $x$  número de naranjas, represente el número de manzanas.
- José compró 3 camisas. Cada camisa cuesta  $a$  quetzales. Represente su vuelto si pagó con un billete de 100 quetzales.
- Lucrecia llevó 5 sillas y su hermana 2. Si una de las sillas que llevó Lucrecia pesa  $x$  kilogramos, y una de las sillas que llevó su hermana pesa  $y$  kilogramos, represente el peso total de sillas que llevaron Lucrecia y su hermana.

## Unidad 2 Algebra

## Sección 2 Expresiones algebraicas Clase 7 Expresiones algebraicas en la vida cotidiana (2)

**P**

Represente las siguientes situaciones cotidianas como expresiones algebraicas.

- ¿A qué rapidez constante se desplaza un camión si recorre  $d$  kilómetros en 3 horas?
- ¿Cuántas horas tarda un hombre en recorrer 10 kilómetros en bicicleta a una rapidez constante  $r$  kilómetros por hora?
- ¿Cuántos kilómetros recorre un campesino si camina una distancia a rapidez constante de 5 kilómetros por hora en  $t$  horas?

**S**

$$\begin{aligned} \text{a. (Rapidez constante)} &= (\text{distancia}) \div (\text{tiempo}) \\ &= d \div 3 \\ &= \frac{d}{3} \text{ (km/h)} \end{aligned}$$

Respuesta: se desplaza a una rapidez  $\frac{d}{3}$  kilómetros por hora.

$$\begin{aligned} \text{b. (Tiempo)} &= (\text{distancia}) \div (\text{rapidez constante}) \\ &= 10 \div r \\ &= \frac{10}{r} \text{ (h)} \end{aligned}$$

Respuesta: tarda  $\frac{10}{r}$  horas.

$$\begin{aligned} \text{c. (Distancia)} &= (\text{tiempo}) \times (\text{rapidez constante}) \\ &= t \times 5 \\ &= 5t \text{ (km)} \end{aligned}$$

Respuesta: recorre  $5t$  kilómetros.

Rapidez constante ( $r$ ) es la razón de una distancia ( $d$ ) a un intervalo de tiempo ( $t$ ).

$$\begin{aligned} r &= \frac{d}{t} \\ t &= \frac{d}{r} \\ d &= t \times r \end{aligned}$$



**C**

Una relación entre varias cantidades en situaciones de la vida cotidiana se puede representar con expresiones algebraicas.

**E**

Represente las siguientes situaciones cotidianas con expresiones algebraicas.

- ¿A qué rapidez constante se desplaza un bus si recorre  $d$  kilómetros en 2 horas?
- ¿Cuántos kilómetros recorre un carro si lleva una rapidez constante  $r$  kilómetros por hora en 3 horas?
- ¿Cuántas horas tarda Jorge si camina 2 kilómetros a una rapidez constante  $r$  kilómetros por hora?

Sección 2 Expresiones algebraicas  
Clase 8 Valor de una expresión (1)

**P** Jimena utiliza láminas para techar su casa. El número de clavos que necesita depende del número de láminas. La relación entre el número de láminas y el número de clavos se representa por  $3x + 3$ , donde  $x$  es el número de láminas.



Encuentre el número de clavos que se requieren para instalar:

- a. 6 láminas
- b. 8 láminas
- c. 20 láminas

**S** Sustituya  $x$  por el número de láminas en la expresión algebraica  $3x + 3$ .

a.  $x = 6$   
 (Número de clavos)  $= 3x + 3$   
 $= 3 \times 6 + 3$   
 $= 3 \times 6 + 3$   
 $= 18 + 3$   
 $= 21$

Respuesta: se requieren 21 clavos para instalar 6 láminas.

b.  $x = 8$   
 (Número de clavos)  $= 3x + 3$   
 $= 3 \times 8 + 3$   
 $= 3 \times 8 + 3$   
 $= 24 + 3$   
 $= 27$

Respuesta: se requieren 27 clavos para instalar 8 láminas.

c.  $x = 20$   
 (Número de clavos)  $= 3x + 3$   
 $= 3 \times 20 + 3$   
 $= 3 \times 20 + 3$   
 $= 60 + 3$   
 $= 63$

Respuesta: se requieren 63 clavos para instalar 20 láminas.

**C** Una **sustitución** consiste en reemplazar la variable de una expresión por un número. Al resultado de la sustitución en una expresión se le llama **valor numérico de la expresión**.

1. Encuentre el valor numérico de la expresión  $5a - 4$  para cada uno de los siguientes casos.
  - a.  $a = 2$
  - b.  $a = 3$
  - c.  $a = 4$
2. Encuentre el valor numérico de  $12 - 4x$  para cada uno de los siguientes casos.
  - a.  $x = 1$
  - b.  $x = 2$
  - c.  $x = 3$

Sección 2 Expresiones algebraicas  
Clase 9 Valor de una expresión (2)

**P** Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones.

- a.  $2a - 7$ , cuando  $a = -3$ .
- b.  $12 - x$ , cuando  $x = -8$ .
- c.  $-3b + 5$ , cuando  $b = -2$ .
- d.  $-5y - 10$ , cuando  $y = -4$ .

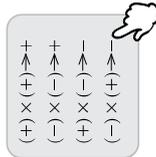
**S** a.  $2a - 7 = 2 \times (-3) - 7$

$= -6 - 7$   
 $= -13$

b.  $12 - x = 12 - (-8)$   
 $= 12 + 8$   
 $= 20$

c.  $-3b + 5 = -3 \times (-2) + 5$   
 $= 6 + 5$   
 $= 11$

d.  $-5y - 10 = -5 \times (-4) - 10$   
 $= 20 - 10$   
 $= 10$



**C** Se pueden sustituir valores negativos en las expresiones algebraicas, teniendo cuidado con los signos que anteceden a las variables en las expresiones.

**E** Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones.

- a.  $x - 7$ , cuando  $x = -5$ .
- b.  $-5y + 4$ , cuando  $y = -2$ .
- c.  $30 - 4z$ , cuando  $z = -6$ .
- d.  $-8 - a$ , cuando  $a = -7$ .
- e.  $7b - 10$ , cuando  $b = -3$ .
- f.  $12c + 54$ , cuando  $c = -4$ .

## Sección 2 Expresiones algebraicas

### Clase 10 Términos y coeficientes

Escriba todos los términos de las siguientes expresiones algebraicas.

- a.  $3x + 5$   
 b.  $a - 5b - 7$   
 a. Los términos son  $3x, 5$ .  
 b.  $a - 5b - 7 = a + (-5b) + (-7)$   
 Los términos son  $a, -5b, -7$ .

A cada parte de una expresión algebraica que se conecta con los signos de suma, se le llama término.

Al número que multiplica la variable en un término se le llama **coeficiente**.

Ejemplo:

a.  $-7x - 5 = (-7x) + (-5)$

b.  $2a - b + 3 = 2a + (-b) + 3$

Los términos son  $-7x, -5$ .

Los términos son  $2a, -b, 3$ .

El coeficiente de  $x$  es  $-7$ .

El coeficiente de  $a$  es  $2$  y el de  $b$  es  $-1$ .

$$-b = -1 \times b$$

Escriba todos los términos y el coeficiente de cada variable de las siguientes expresiones algebraicas.

- a.  $6a + 7$   
 b.  $x - 2y - 10$   
 c.  $-4x - 5$   
 d.  $7b + 5c - 4$   
 e.  $-3y + 8z + 1$   
 f.  $6a + 2b - 9$

## Sección 2 Expresiones algebraicas

### Clase 11 Reducción de términos en una expresión algebraica

En una tienda, Luisa compró 4 pelotas plásticas de color gris y Pedro compró 2 de color blanco. Cada pelota costó  $x$  quetzales.

- a. Escriba la expresión algebraica que representa el total de quetzales gastados en las pelotas.  
 b. Escriba la expresión algebraica que representa la diferencia de gastos entre Luisa y Pedro.

La representación algebraica de las compras es:

Luisa  $\begin{matrix} x & x & x & x \\ | & | & | & | \\ x & x & x & x \end{matrix}$   $4x$   
 Pedro  $\begin{matrix} x & x \\ | & | \\ x & x \end{matrix}$   $2x$

a. El total de gastos de Luisa y Pedro es una suma:

$$\begin{matrix} x & x & x & x & x & x \\ | & | & | & | & | & | \\ x & x & x & x & x & x \end{matrix}$$

$$4x + 2x = (4 + 2)x = 6x$$

Respuesta: el total gastado en pelotas es  $6x$  quetzales.

b. La diferencia de gastos entre Luisa y Pedro es una resta:

$$\begin{matrix} x & x & x & x \\ | & | & | & | \\ x & x & x & x \end{matrix}$$

$$4x - 2x = (4 - 2)x = 2x$$

Respuesta: la diferencia de gastos entre Luisa y Pedro es  $2x$  quetzales.

Al proceso utilizado en las operaciones anteriores se le llama **reducción de términos en una expresión algebraica**.

En este proceso se aplica la propiedad distributiva:

$$ax + bx = (a + b)x$$

Reduzca términos en las siguientes expresiones aplicando la propiedad distributiva.

- a.  $5x + 3x$   
 b.  $8b + 6b$   
 c.  $-20a + 10a$   
 d.  $y + 4y$   
 e.  $7x + 3x$   
 f.  $-2c + 11c$   
 g.  $7z + 13z$   
 h.  $11x + 14x$   
 i.  $3b - b$   
 j.  $5a - 8a$   
 k.  $-7y - 4y$   
 l.  $6x - 5x$   
 m.  $-4a - 11a$   
 n.  $15c - 5c$   
 o.  $-9z - 12z$   
 p.  $12x - 17x$

## Sección 2 Expresiones algebraicas

### Clase 12 Reducción de términos semejantes

Reduzca términos con la misma variable y sin variable en las siguientes expresiones algebraicas.

**P** a.  $7x + 3 - 4x + 2$

b.  $-10z - 4 - 3 - 5z$

c.  $6y + 8 - 9y - 2 - 3$

**S** a.  $7x + 3 - 4x + 2 = 7x - 4x + 3 + 2$   
 $= (7 - 4)x + 3 + 2$   
 $= 3x + 5$

b.  $-10z - 4 - 3 - 5z = -10z - 5z - 4 - 3$   
 $= (-10 - 5)z - 4 - 3$   
 $= -15z - 7$

c.  $6y + 8 - 9y - 2 - 3 = 6y - 9y + 8 - 2 - 3$   
 $= (6 - 9)y + 8 - 5$   
 $= -3y + 3$

**C** En una expresión algebraica se pueden reducir los términos según el tipo de los mismos:  
 Entre los términos que tienen la misma variable.

Entre los términos numéricos, es decir, los que no tienen variable.  
 A los términos que tienen las mismas variables y los mismos exponentes se les llama **términos semejantes**.

Reduzca términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas.

**E** a.  $3x - 4 + 2x - 5$

b.  $4x - 7 + 5x + 1$

c.  $6x + x - 2 - 9 - 9x$

d.  $-3 + 2x + 5 - 8x$

e.  $6 + 7x - 4x - 2x - 4$

f.  $x + 3x - 7 + 6x - 3$

## Sección 2 Expresiones algebraicas

### Clase 13 Multiplicación de una expresión algebraica de un término y un número

Calcule las siguientes expresiones.

**P** a.  $-5x \times 3$

b.  $3y \times (-2)$

c.  $-4 \times (-7b)$

**S** a.  $-5x \times 3 = (-5) \times x \times 3$   
 $= (-5) \times 3 \times x$   
 $= -15x$

b.  $3y \times (-2) = 3 \times y \times (-2)$   
 $= 3 \times (-2) \times y$   
 $= -6y$

c.  $-4 \times (-7b) = (-4) \times (-7) \times b$   
 $= 28b$

$(+) \times (+) \rightarrow +$   
 $(-) \times (-) \rightarrow +$   
 $(+) \times (-) \rightarrow -$   
 $(-) \times (+) \rightarrow -$

**C** Para multiplicar una expresión algebraica de un término por un número, se calcula el coeficiente del término por el número y se copia la variable.

Calcule las siguientes expresiones.

**E** a.  $-7a \times 2$

b.  $4x \times (-5)$

c.  $-3c \times (-6)$

d.  $-8 \times (-2b)$

e.  $-5y \times (-2)$

f.  $-5 \times 6x$

g.  $-4z \times 7$

h.  $7 \times (-8y)$

i.  $-9 \times (-4c)$

## Sección 2 Expresiones algebraicas

### Clase 14 División de una expresión algebraica de un término entre un número

Calcule las siguientes expresiones.

- P**
- $27x \div (-3)$
  - $-32y \div (-8)$
  - $-21b \div 7$

**S**

$$a. 27x \div (-3) = \frac{27x}{-3} = -9x$$

$$b. -32y \div (-8) = \frac{-32y}{-8} = 4y$$

$$c. -21b \div 7 = \frac{-21b}{7} = -3b$$

$(+) \div (+) \rightarrow +$   
 $(-) \div (-) \rightarrow +$   
 $(+) \div (-) \rightarrow -$   
 $(-) \div (+) \rightarrow -$

**C** Para dividir una expresión algebraica de un término entre un número, se divide el coeficiente del término entre el número y se copia la variable.

Calcule las siguientes expresiones.

- E**
- $36x \div (-4)$
  - $-12a \div (-3)$
  - $-18y \div 6$
  - $30b \div (-5)$
  - $-18z \div (-9)$
  - $-28x \div 4$
  - $35b \div (-7)$
  - $-45z \div (-9)$
  - $-33c \div 11$

## Sección 2 Expresiones algebraicas

### Clase 15 Multiplicación de un número y una expresión algebraica de dos términos

Calcule las siguientes expresiones.

- P**
- $4(x+2)$
  - $(5-y) \times 3$
  - $(-2b-7) \times (-5)$

**S** a. Considerando el área del rectángulo cuya base es 4 y cuya altura es,  $x+2$ :

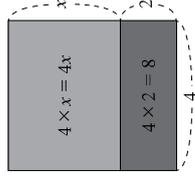
El área del rectángulo es  $4(x+2)$ .

El rectángulo está formado por dos rectángulos pequeños cuyas áreas son  $4x$  y 8.

El área total del rectángulo es la suma de los dos rectángulos pequeños.

Por tanto,  $4(x+2) = 4x+8$

Eso significa que  $4(x+2) = 4 \times x + 4 \times 2 = 4x+8$



**b.**  $(5-y) \times 3 = 5 \times 3 + (-y) \times 3 = 15 - 3y$

**c.**  $(-2b-7) \times (-5) = -2b \times (-5) + (-7) \times (-5) = 10b + 35$

**C** Para multiplicar un número por una expresión algebraica de dos términos, se aplica la propiedad distributiva:

$$a(x+y) = a \times x + a \times y = ax + ay$$

$$(x+y) \times a = x \times a + y \times a = ax + ay$$

Calcule las siguientes expresiones.

- E**
- $2(5y+6)$
  - $(4-c) \times 11$
  - $(-7-2x) \times (-6)$
  - $3(-2x-4)$
  - $(3a+4) \times 4$
  - $-12(b+2)$
  - $(3z+7) \times (-5)$
  - $-7(a+7)$
  - $(6b-2) \times (-8)$

## Sección 2 Expresiones algebraicas

### Clase 16 División de una expresión algebraica de dos términos entre un número

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(27x - 9) \div 3$   
 b.  $(-8 - 32y) \div (-8)$   
 c.  $(-21b - 14) \div 7$

a.  $(27x - 9) \div 3 = (27x - 9) \times \frac{1}{3}$   
 $= \frac{27x}{3} - \frac{9}{3}$   
 $= 9x - 3$

$\frac{27x}{3} + \frac{-9}{3}$  se puede expresar  $\frac{27x}{3} - \frac{9}{3}$  también.



b.  $(-8 - 32y) \div (-8) = (-8 - 32y) \times \left(-\frac{1}{8}\right)$   
 $= \frac{8}{8} + \frac{32y}{8}$   
 $= 1 + 4y$

$-\frac{8}{8} + \frac{-32y}{-8}$  se puede expresar  $\frac{8}{8} + \frac{32y}{8}$  también.



c.  $(-21b - 14) \div 7 = (-21b - 14) \times \frac{1}{7}$   
 $= \frac{-21b}{7} - \frac{14}{7}$   
 $= -3b - 2$

$\frac{-21b}{7} + \frac{-14}{7}$  se puede expresar  $\frac{-21b}{7} - \frac{14}{7}$  también.



## Unidad 2

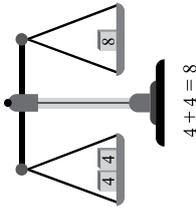
### Algebra

## Sección 3 Ecuaciones de primer grado

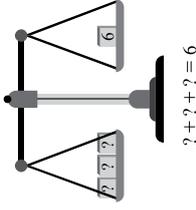
### Clase 1 Igualdad de dos expresiones numéricas

**P** Con base en la igualdad de la balanza 1, encuentre la igualdad matemática de la balanza 2 en donde el peso del miembro izquierdo es igual al miembro derecho. Encuentre el valor del peso de cada objeto del miembro izquierdo para que los pesos sean iguales en ambos lados.

Balanza 1



Balanza 2

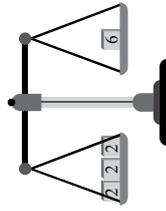


**S**

Para encontrar la igualdad matemática de la balanza 2.

$$? + ? + ? = 6$$

$$2 + 2 + 2 = 6$$



**C**

Se utiliza el signo igual "=" para representar la igualdad entre dos cantidades.

**E**

Llene los espacios en blanco para completar la igualdad matemática.

- a.  $3 + \square = 7$     b.  $8 - \square = 5$     c.  $4 + 5 = 1 + \square$     d.  $10 - 1 = \square + 7$   
 e.  $7 + \square = 14$     f.  $15 + \square = 17$     g.  $21 - 1 = 5 + \square$     h.  $18 - 6 = 10 + \square$   
 i.  $21 = \square + 7$     j.  $22 - 2 = 10 + \square$     k.  $45 + \square = 50$     l.  $80 - \square = 40$

**C**

Para dividir una expresión algebraica de dos términos entre un número, se convierte a una multiplicación utilizando el recíproco del divisor y luego se aplica la propiedad distributiva.

$$(x + y) \div a = (x + y) \times \frac{1}{a}$$

$$= \frac{x}{a} + \frac{y}{a}$$

Calcule las siguientes expresiones.

- a.  $(20x - 10) \div 2$   
 b.  $(24 - 42a) \div (-6)$   
 c.  $(-12y - 18) \div 3$   
 d.  $(-33 - 11b) \div 11$   
 e.  $(36a - 12) \div (-4)$   
 f.  $(-30c - 40) \div 10$   
 g.  $(18 - 45b) \div 9$   
 h.  $(-32z - 48) \div (-8)$

**E**

Sección 3 Ecuaciones de primer grado  
Clase 3 Solución de ecuaciones

**P**

Encuentre el valor de la variable  $x$  en  $2x + 10 = 20$ .

**S**

Para encontrar el valor de la variable  $x$  en  $2x + 10 = 20$ , se sustituye la variable  $x$  con algunos valores para completar la igualdad matemática.

Valor de $x$	Miembro izquierdo $2x + 10$	Valor del miembro izquierdo	¿Se cumple la igualdad?
Si $x = 1$	$2 \times 1 + 10$	12	No
Si $x = 2$	$2 \times 2 + 10$	14	No
Si $x = 3$	$2 \times 3 + 10$	16	No
Si $x = 4$	$2 \times 4 + 10$	18	No
Si $x = 5$	$2 \times 5 + 10$	20	Si
Si $x = 6$	$2 \times 6 + 10$	22	No

Respuesta: el valor de la variable  $x$  es 5.

**G**

A la igualdad de dos expresiones matemáticas que incluyen una o más variables, se le llama **ecuación**.

En una ecuación, al valor desconocido que se representa por una variable se le llama **incógnita**.

Al valor numérico de la incógnita que cumple la igualdad matemática se le llama **solución de una ecuación**.

**E**

1. Encuentre las ecuaciones que tienen como solución el número 2.

- a.  $2x + 5 = 11$       b.  $3x + 1 = 7$       c.  $-4x + 2 = -8$

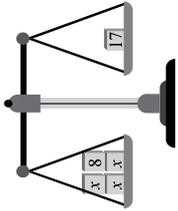
2. Encuentre las ecuaciones que tienen como solución el número  $-3$ .

- a.  $4x + 6 = 18$       b.  $5x - 2 = 17$       c.  $-6x - 2 = 16$

Sección 3 Ecuaciones de primer grado  
Clase 2 Igualdad de dos expresiones algebraicas

**P**

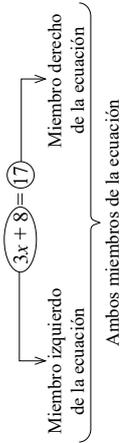
Escriba la expresión algebraica que representa la balanza.



(Lado izquierdo de la balanza)  
 $= x + x + x + 8$   
 $= 3x + 8$   
 (Lado derecho de la balanza)  
 $= 17$

**S**

Entonces, el lado izquierdo y el lado derecho de la balanza están equilibrados. Por tanto, se puede representar como  $3x + 8 = 17$ .

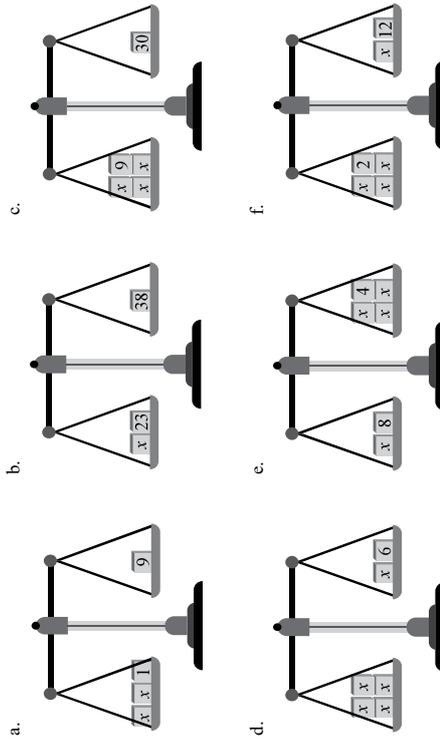


**G**

Se utiliza el signo igual “=” para representar la igualdad entre dos expresiones algebraicas.

**E**

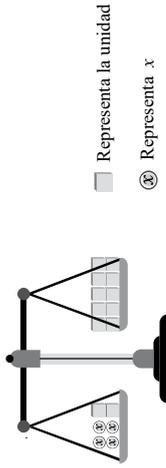
Escriba la igualdad matemática que representa cada una de las siguientes balanzas.



Sección 3 Ecuaciones de primer grado  
Clase 4 Propiedades de igualdad

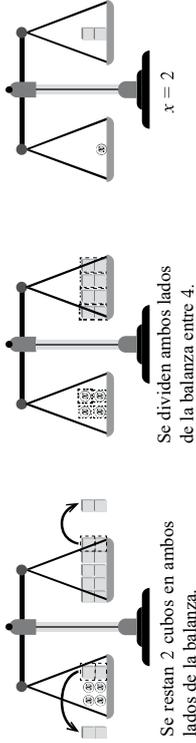
**P**

Encuentre el valor de  $x$  en la ecuación  $4x + 2 = 10$ , representándola como el peso equilibrado de una balanza.



**S**

Para encontrar la solución de la ecuación  $4x + 2 = 10$ , como el equilibrio de una balanza:



**G**

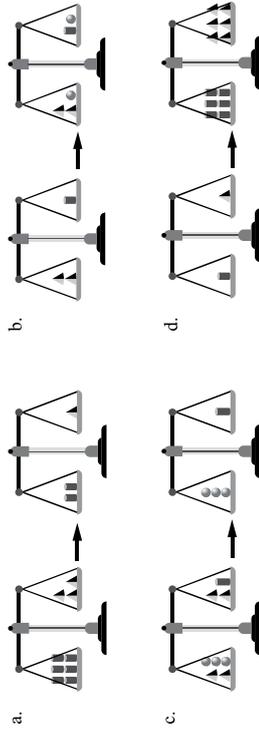
La igualdad matemática se mantiene cuando:

- Propiedad 1. Se suma el mismo número o expresión en ambos miembros. Si  $A = B$ , entonces  $A + C = B + C$ .
- Propiedad 2. Se resta el mismo número o expresión en ambos miembros. Si  $A = B$ , entonces  $A - C = B - C$ .
- Propiedad 3. Se multiplican ambos miembros por el mismo número o expresión. Si  $A = B$ , entonces  $A \times C = B \times C$ .
- Propiedad 4. Se dividen ambos miembros entre el mismo número o expresión (excepto 0). Si  $A = B$ , entonces  $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ .

A las afirmaciones anteriores se les llama **propiedades de la igualdad matemática**.

**E**

Identifique la propiedad que representa cada una de las siguientes igualdades.



Sección 3 Ecuaciones de primer grado  
Clase 5 Solución de ecuaciones de la forma  $x - a = b$

**P**

Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $x - 5 = 10$
- b.  $-2 + x = 2$

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de  $x$ .



**S**

- a.  $x - 5 = 10$   
 $x - 5 + 5 = 10 + 5$   
 $x = 15$

Se suma 5 en ambos miembros de la ecuación.

- b.  $-2 + x = 2$   
 $-2 + 2 + x = 2 + 2$   
 $x = 4$

Se suma 2 en ambos miembros de la ecuación.

Para verificar si la respuesta es la solución de una ecuación, se sustituye el valor de  $x$  encontrado en la ecuación. Por ejemplo, en caso del inciso a, se sustituye  $x$  por 15 en  $x - 5 = 10$ :  
(miembro izquierdo)  $= 15 - 5 = 10$   
(miembro derecho)  $= 10$   
Los resultados de ambos miembros son iguales. Entonces, 15 es el valor de  $x$  de la ecuación.



**G**

Para resolver una ecuación de la forma  $x - a = b$ , se suma  $a$  en ambos miembros de la ecuación.

$$\begin{aligned} x - a &= b & x - 5 &= 10 \\ x - a + a &= b + a & x - 5 + 5 &= 10 + 5 \\ x &= b + a & x &= 15 \end{aligned}$$

**E**

1. Complete la solución de las siguientes ecuaciones.

- a.  $x - 6 = 1$   
 $x - 6 + \square = 1 + \square$   
 $x = \square$
- b.  $-3 + x = -7$   
 $-3 + \square + x = -7 + \square$   
 $x = \square$
- c.  $x - 8 = 6$   
 $x - 8 + \square = 6 + \square$   
 $x = \square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $x - 2 = 4$
- b.  $x - 1 = -5$
- c.  $-3 + x = 2$
- d.  $-5 + x = -4$
- e.  $x - 6 = 3$
- f.  $-7 + x = -3$
- g.  $x - 8 = 8$
- h.  $-4 + x = -9$
- i.  $x - 11 = 4$

Sección 3 Ecuaciones de primer grado  
Clase 7 Solución de ecuaciones de la forma  $\frac{1}{a}x = b$  o  $\frac{x}{a} = b$

Resuelva las siguientes ecuaciones.

**P**

- a.  $-\frac{x}{6} = 3$   
b.  $\frac{1}{4}x = 2$

**S**

- a.  $-\frac{x}{6} = 3$   
 $-\frac{x}{6} \times (-6) = 3 \times (-6)$   
 $x = -18$

Un número multiplicado por su recíproco da como producto "1".  
Ejemplo:  
 $\frac{1}{9} \times 9 = 1$   
9 es el recíproco de  $\frac{1}{9}$ .

- b.  $\frac{1}{4}x = 2$   
 $\frac{1}{4}x \times 4 = 2 \times 4$   
 $x = 8$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por 4.

**C**

Para resolver una ecuación de la forma  $\frac{x}{a} = b$  o  $\frac{1}{a}x = b$ , se multiplican ambos miembros de la ecuación por  $a$ .

$\frac{x}{a} = b$   
 $\frac{x}{a} \times a = b \times a$   
 $x = ab$

$-\frac{x}{6} = 3$   
 $-\frac{x}{6} \times (-6) = 3 \times (-6)$   
 $x = -18$

**E**

1. Complete la solución de las siguientes ecuaciones.

- a.  $\frac{1}{5}x = 3$   
 $\frac{1}{5}x \times \square = 3 \times \square$   
 $x = \square$
- b.  $\frac{x}{8} = -6$   
 $\frac{x}{8} \times \square = -6 \times \square$   
 $x = \square$
- c.  $-\frac{1}{10}x = 5$   
 $-\frac{1}{10}x \times \square = 5 \times \square$   
 $x = \square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $\frac{1}{7}x = 4$   
b.  $\frac{x}{9} = -2$   
c.  $-\frac{x}{3} = 5$   
d.  $-\frac{x}{4} = -5$   
e.  $\frac{x}{6} = -6$   
f.  $-\frac{x}{10} = 3$

Sección 3 Ecuaciones de primer grado  
Clase 6 Solución de ecuaciones de la forma  $x + a = b$

Resuelva las siguientes ecuaciones.

**P**

- a.  $x + 7 = 4$   
b.  $3 + x = -2$

**S**

- a.  $x + 7 = 4$   
 $x + 7 - 7 = 4 - 7$   
 $x = -3$
- b.  $3 + x = -2$   
 $3 - 3 + x = -2 - 3$   
 $x = -5$

Se resta 7 en ambos miembros de la ecuación.

Se resta 3 en ambos miembros de la ecuación.

**C**

Para resolver una ecuación de la forma  $x + a = b$ , se resta  $a$  en ambos miembros de la ecuación.

$x + a = b$   
 $x + a - a = b - a$   
 $x = b - a$

$x + 7 = 4$   
 $x + 7 - 7 = 4 - 7$   
 $x = -3$

**E**

1. Complete la solución de las siguientes ecuaciones.

- a.  $x + 6 = 2$   
 $x + 6 - \square = 2 - \square$   
 $x = \square$
- b.  $1 + x = -4$   
 $1 - \square + x = -4 - \square$   
 $x = \square$
- c.  $x + 8 = 10$   
 $x + 8 - \square = 10 - \square$   
 $x = \square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $x + 5 = 9$   
b.  $4 + x = -3$   
c.  $2 + x = -7$   
d.  $3 + x = -8$   
e.  $x + 6 = 6$   
f.  $7 + x = -5$   
g.  $x + 8 = 7$   
h.  $5 + x = 6$   
i.  $3 + x = -10$

**Sección 3 Ecuaciones de primer grado**  
**Clase 9 Solución de ecuaciones de la forma  $ax + b = c$**



Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $2x + 6 = -12$   
b.  $6x - 4 = 26$



- a.  $2x + 6 = -12$   
 $2x + 6 - 6 = -12 - 6$  Se resta 6 en ambos miembros de la ecuación.

$$\frac{2x}{2} = \frac{-18}{2}$$

$2x = -18$   
 $x = -9$

Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 2.

- b.  $6x - 4 = 26$   
 $6x - 4 + 4 = 26 + 4$  Se suma 4 en ambos miembros de la ecuación.  
 $6x = 30$   
 $\frac{6x}{6} = \frac{30}{6}$  Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 6.  
 $x = 5$



Para resolver una ecuación de la forma  $ax + b = c$  o  $ax + b = c + b$  o  $ax - b = c$  o  $ax - b + b = c + b$  o  $ax - b = c + b$  o  $ax = c - b$  o  $\frac{ax}{a} = \frac{c - b}{a}$  o  $\frac{ax}{a} = \frac{c + b}{a}$  o  $x = \frac{c - b}{a}$  o  $x = \frac{c + b}{a}$

Paso 1. Se suma o se resta  $b$  en ambos miembros de la ecuación.

Paso 2. Se dividen ambos miembros de la ecuación entre  $a$ .



1. Complete la solución de las siguientes ecuaciones.

- a.  $2x - 5 = 7$   
 $2x - 5 + \square = 7 + \square$   
 $2x = \square$   
 $\frac{2x}{2} = \frac{\square}{2}$   
 $x = \square$
- b.  $6 + 7x = 34$   
 $6 - \square + 7x = 34 - \square$   
 $7x = \square$   
 $\frac{7x}{7} = \frac{\square}{7}$   
 $x = \square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $3x + 1 = 10$   
b.  $4x - 1 = -17$   
c.  $-5x + 2 = -8$   
d.  $6 - 8x = 30$

**Sección 3 Ecuaciones de primer grado**  
**Clase 8 Solución de ecuaciones de la forma  $ax = b$**



Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $9x = -45$   
b.  $-10x = 20$



- a.  $9x = -45$   
 $\frac{9x}{9} = \frac{-45}{9}$   
 $x = -5$
- Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 9.

- b.  $-10x = 20$   
 $\frac{-10x}{-10} = \frac{20}{-10}$   
 $x = -2$
- Se dividen ambos miembros de la ecuación entre  $-10$ .



Para resolver una ecuación de la forma  $ax = b$ , se dividen ambos miembros de la ecuación entre  $a$ .

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{-45}{9}$$

$$\frac{-10x}{-10} = \frac{20}{-10}$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{-45}{9}$$

$$\frac{-10x}{-10} = \frac{20}{-10}$$

$$x = -5$$

$$x = -2$$



1. Complete la solución de las siguientes ecuaciones.

- a.  $6x = 48$   
 $\frac{6x}{6} = \frac{48}{6}$   
 $x = \square$
- b.  $-3x = -21$   
 $\frac{-3x}{-3} = \frac{-21}{-3}$   
 $x = \square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $4x = 12$   
b.  $-5x = 25$   
c.  $8x = 56$   
d.  $-7x = -21$

Sección 3 Ecuaciones de primer grado  
Clase 11 Solución de ecuaciones de la forma  $ax = bx + c$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $8x = 6x + 4$   
b.  $5x = -6 + 3x$



- a.  $8x = 6x + 4$   
 $8x - 6x = 6x - 6x + 4$  Se resta  $6x$  en ambos miembros de la ecuación.  
 $2x = 4$   
 $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$  Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 2.  
 $x = 2$

- b.  $5x = -6 + 3x$   
 $5x - 3x = -6 + 3x - 3x$  Se resta  $3x$  en ambos miembros de la ecuación.  
 $2x = -6$   
 $\frac{2x}{2} = \frac{-6}{2}$  Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 2.  
 $x = -3$



Para resolver una ecuación de la forma  $ax = bx + c$ :

- Paso 1. Se resta  $bx$  en ambos miembros de la ecuación.  
 $ax - bx = bx - bx + c$   
 $(a - b)x = c$   
Paso 2. Se reducen los términos semejantes.  
 $\frac{(a - b)x}{a - b} = \frac{c}{a - b}$   
Paso 3. Se dividen ambos miembros de la ecuación entre  $a - b$ .  
 $x = \frac{c}{a - b}$



1. Complete la solución de las siguientes ecuaciones.

- a.  $10x - \square = 7x + 15$   
 $\square x = 15$   
 $\square x = \square$   
 $\square x = \square$   
 $x = \square$
- b.  $4x = 8 + 6x$   
 $4x - \square = 8 + 6x - \square$   
 $\square x = 8$   
 $\square x = \square$   
 $x = \square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $4x = 2x + 8$   
b.  $6x = -15 + 3x$   
c.  $7x = 8 + 11x$   
d.  $3x = 10x + 21$

Sección 3 Ecuaciones de primer grado  
Clase 10 Solución de ecuaciones de la forma  $\frac{x}{a} + b = c$  o  $\frac{x}{a} - b = c$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

- a.  $\frac{x}{5} + 2 = -4$   
b.  $\frac{x}{6} - 3 = 5$



- a.  $\frac{x}{7} + 2 = -4$   
 $\frac{x}{7} + 2 - 2 = -4 - 2$  Se resta 2 en ambos miembros de la ecuación.  
 $\frac{x}{7} = -6$   
 $\frac{x}{7} \times 7 = -6 \times 7$  Se multiplican ambos miembros de la ecuación por 7.  
 $x = -42$

- b.  $\frac{x}{6} - 3 = 5$   
 $\frac{x}{6} - 3 + 3 = 5 + 3$  Se suma 3 en ambos miembros de la ecuación.  
 $\frac{x}{6} = 8$   
 $\frac{x}{6} \times 6 = 8 \times 6$  Se multiplican ambos miembros de la ecuación por 6.  
 $x = 48$



Para resolver una ecuación de la forma  $\frac{x}{a} + b = c$  o  $\frac{x}{a} - b = c$ :

- Paso 1. Se suma o resta  $b$  en ambos miembros de la ecuación.  
 $\frac{x}{a} + b - b = c - b$   
 $\frac{x}{a} = c - b$   
Paso 2. Se multiplican ambos miembros de la ecuación por  $a$ .  
 $\frac{x}{a} \times a = (c - b) \times a$   
 $x = a(c - b)$



1. Complete la solución de las siguientes ecuaciones.

- a.  $\frac{x}{4} + 2 = 3$   
 $\frac{x}{4} + 2 - \square = 3 - \square$   
 $\frac{x}{4} = \square$   
 $\frac{x}{4} \times \square = \square \times \square$   
 $x = \square$
- b.  $\frac{x}{3} - 4 = 1$   
 $\frac{x}{3} - 4 + \square = 1 + \square$   
 $\frac{x}{3} = \square$   
 $\frac{x}{3} \times \square = \square \times \square$   
 $x = \square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones.

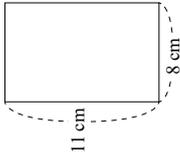
- a.  $\frac{x}{2} + 6 = 4$   
b.  $\frac{x}{8} - 7 = -6$   
c.  $-4 - \frac{x}{9} = -1$   
d.  $\frac{x}{5} + 3 = 2$



**Sección 4 Razones y proporciones**  
**Clase 2 Valor de razón**

**P**

Encuentre la razón de la altura a la base.



**S**

La razón de la altura a la base es  $11:8$ .

Divida el antecedente 11 entre el consecuente 8.

$$11 \div 8 = \frac{11}{8}$$

Se dice que  $\frac{11}{8}$  es el valor de razón.

**C**

Valor de razón de  $a:b$ :

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

**E**

1. Encuentre el valor de razón (simplifique si es posible).

a.  $3:7$

b.  $2:3$

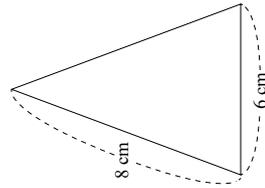
c.  $6:8$

d.  $12:18$

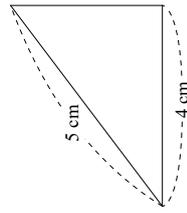
e.  $15:10$

2. Encuentre el valor de razón del lado a la base del siguiente triángulo. Simplifique si es posible.

a.



b.



**Unidad 2**  
**Álgebra**

**Sección 4 Razones y proporciones**  
**Clase 3 Razones equivalentes**

**P**

Ana disolvió 2 dL de concentrado de horchata en 24 dL de agua en el pichel A y 3 dL de concentrado de horchata en 36 dL de agua en el pichel B. Compare el valor de razón de la cantidad de concentrado de horchata a la cantidad de agua del pichel A con el del pichel B.

**S**

Pichel A

La razón del concentrado de horchata al agua es  $2:24$ . Entonces, el valor de razón es:

$$2 \div 24 = \frac{2}{24} \\ = \frac{1}{12}$$

Pichel B

La razón del concentrado de horchata al agua es  $3:36$ . Entonces, el valor de razón es:

$$3 \div 36 = \frac{3}{36} \\ = \frac{1}{12}$$

Los valores de razón son iguales para ambos pichels. Entonces, se dice que las razones  $2:24$  y  $3:36$  son equivalentes y se representa como:

$$2:24 = 3:36$$

**C**

A dos razones que tienen el mismo valor de razón se les llama **razones equivalentes**. A una igualdad que muestra dos razones equivalentes se le llama **proporción**.

**E**

1. Analice si el par de razones en cada inciso es equivalente.

a.  $6:8$  y  $9:12$

b.  $8:12$  y  $20:24$

c.  $56:21$  y  $36:12$

2. Resuelva.

El edificio A mide 8 m de altura y el edificio B mide 12 m de altura. Si el edificio A proyecta una sombra de 6 m de largo y el edificio B una sombra de 9 m de largo a cierta hora del día, ¿la razón de las alturas es equivalente a la razón de las sombras de ambos edificios?

Sección 4 Razones y proporciones  
Clase 5 Simplificación de razón

**P** Doña Mary prepara café con azúcar y la razón de azúcar y café es 2 : 5. Doña Luisa también prepara café con azúcar y la razón de azúcar y café es 4 : 10.

- Analice si las dos razones 2 : 5 y 4 : 10 son equivalentes.
- Encuentre la relación entre las dos razones.

**S** a. Valor de razón del café de doña Mary:  $2 \div 5 = \frac{2}{5}$

Valor de razón del café de doña Luisa:  $4 \div 10 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Por tanto, estas dos razones son equivalentes.

- Ambos números de la primera razón 2 : 5 se pueden multiplicar por 2 para obtener la segunda razón 4 : 10.

$$\begin{array}{c} \times 2 \\ 2 : 5 = 4 : 10 \\ \times 2 \end{array}$$

Ambos números de la segunda razón 4 : 10 se pueden dividir entre 2 para obtener la primera razón 2 : 5.

$$\begin{array}{c} \div 2 \\ 4 : 10 = 2 : 5 \\ \div 2 \end{array}$$

**C**

Cuando los términos de una razón son multiplicados o divididos por el mismo número (excepto 0), se obtiene una razón equivalente.

Ejemplo:

$$\begin{array}{c} \times 3 \quad \times 3 \\ 1 : 2 = 3 : 6 = 9 : 18 \\ \div 3 \quad \div 3 \end{array}$$

Dos razones equivalentes de 3 : 6 son 1 : 2 y 9 : 18.

Escriba dos razones equivalentes para las siguientes razones.

- 2 : 3
- 8 : 5
- 5 : 10
- 18 : 15
- 4 : 9
- 10 : 8
- 3 : 4
- 14 : 12

**E**

**P**

Encuentre la razón equivalente más simple de cada una de las siguientes razones.

- 8 : 20
- 27 : 18

**S**

Encuentre una razón equivalente dividiendo ambos términos de la razón por el mismo número.

$$\begin{array}{c} \div 2 \quad \div 2 \\ 8 : 20 = 4 : 10 = 2 : 5 \\ \div 2 \quad \div 2 \end{array}$$

Como no hay divisor común entre 2 y 5, 2 : 5 es la razón equivalente más simple.

b.

$$\begin{array}{c} \div 3 \quad \div 3 \\ 27 : 18 = 9 : 6 = 3 : 2 \\ \div 3 \quad \div 3 \end{array}$$

Como no hay divisor común entre 3 y 2, 3 : 2 es la razón equivalente más simple.

**C**

Al transformar una razón a una razón equivalente con el menor número entero posible se le llama **simplificación de razón**.

**E**

Simplifique las siguientes razones.

- 6 : 12
- 16 : 48
- 96 : 12
- 24 : 18
- 56 : 14
- 32 : 16
- 14 : 21
- 39 : 13
- 35 : 28
- 18 : 45
- 7 : 28
- 36 : 24

## Sección 4 Razones y proporciones Clase 6 Proporciones (1)

Si la razón  $x:3$  es equivalente a  $10:15$ , ¿cuál es el valor del término  $x$ ?



Como ambas razones son equivalentes, entonces se dice que:  
 $x:3 = 10:15$



Para encontrar el valor del término  $x$ :  
Forma 1.  
Útilice la relación entre razones equivalentes.

$$\begin{array}{c} \div 5 \\ x:3 = 10:15 \\ \div 5 \end{array}$$

$$x = 10 \div 5 = 2$$

Forma 2.

Encuentre el valor de  $x$  en la ecuación.

$$\frac{x}{3} = \frac{10}{15} \quad \text{Se expresa el valor de razón.}$$

$$\frac{x}{3} \times 3 = \frac{10}{15} \times 3 \quad \text{Se multiplican ambos miembros por 3.}$$

$$x = \frac{10}{5}$$

$x = 2$  Se simplifica.

Respuesta: si la razón  $x:3$  es equivalente a  $10:15$ , el valor de  $x$  es 2.

$$2:3 = 10:15$$

En la proporción  $2:3 = 10:15$ , a los términos 2 y 15 se les llama términos extremos y a los términos 3 y 10 se les llama términos medios.

En la proporción, el producto de los términos extremos  $2 \times 15$  es igual al producto de los términos medios  $3 \times 10$ .

$$\begin{array}{l} 2 \times 15 = 30 \\ \underline{2:3 = 10:15} \\ 3 \times 10 = 30 \end{array}$$



En una proporción  $a:b = c:d$  a los términos  $a$  y  $d$  se les llama **términos extremos** y a los términos  $b$  y  $c$  se les llama **términos medios**.

En una proporción  $a:b = c:d$ , el producto de los términos extremos  $ad$  es igual al producto de los términos medios  $bc$ . Si  $a:b = c:d$ , entonces  $ad = bc$ .

Ejemplo:

$$x:4 = 15:20$$

$$20x = 4 \times 15$$

$$20x = 60$$

$$\frac{20x}{20} = \frac{60}{20}$$

$$x = 3$$

Encuentre el valor del término  $x$  en las siguientes proporciones.

- a.  $x:2 = 8:4$       b.  $3:x = 2:6$       c.  $9:6 = 12:x$       d.  $9:12 = x:8$   
e.  $4:x = 7:21$       f.  $x:14 = 10:35$       g.  $10:6 = x:15$       h.  $15:12 = 10:x$



## Sección 4 Razones y proporciones Clase 7 Proporciones (2)

La cantidad de azúcar y harina que se utilizan para preparar un pastel tiene una razón de  $3:5$ . Si se usan 150 g de harina, ¿cuántos gramos de azúcar se necesitarán?



La proporción sería  $3:5 = x:150$ , siendo  $x$  los gramos de azúcar. Encuentre el valor del término  $x$ .



Si  $a:b = c:d$ , entonces  $ad = bc$ .  
Por tanto,

$$3:5 = x:150$$

$$5x = 3 \times 150$$

$$5x = 450$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{450}{5}$$

$$x = 90$$

Respuesta: 90 gramos de azúcar



En una proporción  $a:b = c:d$  el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

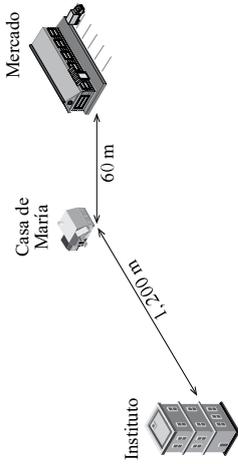
Si  $a:b = c:d$ , entonces  $ad = bc$ .



Resuelva los siguientes problemas.

- a. En la sección "A" de primero básico, la razón del número de mujeres al de hombres es  $3:4$ . Si hay 30 mujeres, ¿cuántos hombres habrá en la sección?
- b. La razón de la medida de la base a la altura de un rectángulo es  $2:5$ . Si la base mide 10 cm, ¿cuánto medirá la altura?
- c. La razón de basura no reciclable a basura reciclable en un municipio es  $5:11$ . Si hay 550 quintales de basura reciclable, ¿cuántos quintales de basura no reciclable habrá?

## Sección 5 Sistemas de medición Clase 1 Longitud



- Encuentre la distancia en km entre la casa de María y el instituto.
- Encuentre la distancia en cm entre la casa de María y el mercado.



- La distancia entre la casa de María y el instituto es 1,200 m. 1,000 m es equivalente a 1 km. Para convertir de kilómetro a metro, se divide la distancia en kilómetros entre 1,000.  $1,200 \div 1,000 = 1.2$

Por tanto, 1.2 km.

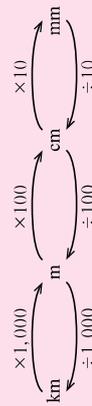
- La distancia entre la casa de María y el mercado es 60 m. 1 m es equivalente a 100 cm. Para convertir de metro a centímetro, se multiplica la distancia en metros por 100.  $60 \times 100 = 6,000$

Por tanto, 6,000 cm.



Algunas unidades de longitud en el sistema métrico decimal:

km	m	cm	mm
1	1,000	100,000	1,000,000
0.001	1	100	1,000
0.00001	0.01	1	10
0.0000001	0.001	0.1	1



Ejemplo:  
Convierta las unidades de longitud a las medidas indicadas.

- 2 km a m  
 $2 \times 1,000 = 2,000$   
Por tanto, 2,000 m.

- 3,000 cm a m  
 $3,000 \div 100 = 30$   
Por tanto, 30 m.

- 15 cm a mm  
 $15 \times 10 = 150$   
Por tanto, 150 mm.



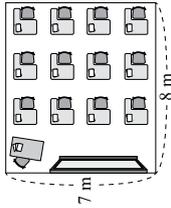
Convierta.

- 7 km a m
- 2 m a cm
- 30 cm a mm
- 2,500 m a km
- 400 cm a m
- 150 mm a cm

Sección 5 Sistemas de medición  
Clase 2 Conversiones bidimensionales



Observe la imagen del salón de clases que está a la derecha.



- Encuentre el área de la clase en  $m^2$ .
- Encuentre el área de la clase en  $cm^2$ .



- $8 \times 7 = 56$   
Entonces,  $56 m^2$ .

- Para encontrar el área en  $cm^2$ , convierta la base y la altura de  $m$  a  $cm$ .

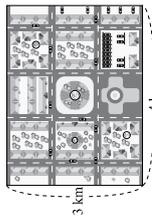
Base:  $8 \times 100 = 800$  (cm)  
 Altura:  $7 \times 100 = 700$  (cm)  
 Área:  $800 \times 700 = 560,000$  ( $cm^2$ )  
 Entonces,  $560,000 cm^2$ .

$1 m = 100 cm$

Los resultados de los incisos a y b son el área de la clase. Por tanto,  $56 m^2 = 560,000 cm^2$ .



Observe la imagen de la ciudad que está a la derecha.



- Encuentre el área de la ciudad en  $km^2$ .
- Encuentre el área de la ciudad en  $m^2$ .



- $4 \times 3 = 12$   
Entonces,  $12 km^2$ .

- Para encontrar el área en  $m^2$ , convierta la base y la altura de  $km$  a  $m$ .

Base:  $4 \times 1,000 = 4,000$  (m)  
 Altura:  $3 \times 1,000 = 3,000$  (m)  
 Área:  $4,000 \times 3,000 = 12,000,000$  ( $m^2$ )  
 Entonces,  $12,000,000 m^2$ .

$1 km = 1,000 m$

Los resultados de los incisos a y b son el área de la ciudad. Por tanto,  $12 km^2 = 12,000,000 m^2$ .



Algunas unidades de área en el sistema métrico decimal:

$km^2$	$m^2$	$cm^2$	$mm^2$
1	1,000,000	10,000,000,000	1,000,000,000,000
0.000001	1	10,000	1,000,000
0.0000000001	0.0001	1	100
0.000000000001	0.000001	0.01	1

$\times 1,000,000$      $\times 10,000$      $\times 100$   
 $\div 1,000,000$      $\div 10,000$      $\div 100$

$km^2 \rightarrow m^2 \rightarrow cm^2 \rightarrow mm^2$   
 $mm^2 \rightarrow cm^2 \rightarrow m^2 \rightarrow km^2$

Ejemplo:

- $8 cm^2$  a  $mm^2$   
 $8 \times 100 = 800$   
 Por tanto,  $800 mm^2$ .
- $4,000,000 cm^2$  a  $m^2$   
 $4,000,000 \div 10,000 = 400$   
 Por tanto,  $400 m^2$ .
- $70,000,000 m^2$  a  $km^2$   
 $70,000,000 \div 1,000,000 = 70$   
 Por tanto,  $70 km^2$ .



Convierta las siguientes unidades de área a las medidas indicadas.

- $2 cm^2$  a  $mm^2$
- $6 m^2$  a  $cm^2$
- $9 km^2$  a  $m^2$
- $400 mm^2$  a  $cm^2$
- $150,000 cm^2$  a  $m^2$
- $3,000,000 m^2$  a  $km^2$

## Sección 6 Porcentajes Clase 1 Porcentajes

La siguiente tabla muestra el número de estudiantes de un instituto de Mazatenango.

Grado	Cantidad de estudiantes
1ro.	80
2do.	70
3ro.	50
Total	200

Encuentre el porcentaje de cada uno de los grados respecto al total de los estudiantes.

$$\frac{\text{(Estudiantes de primer grado)}}{\text{(Total de estudiantes)}} = \frac{80}{200} = \frac{2}{5} = 0.40 \longrightarrow 0.40 \times 100 = 40(\%)$$

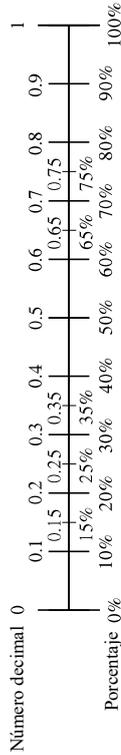
$$\frac{\text{(Estudiantes de segundo grado)}}{\text{(Total de estudiantes)}} = \frac{70}{200} = 0.35 \longrightarrow 0.35 \times 100 = 35(\%)$$

$$\frac{\text{(Estudiantes de tercer grado)}}{\text{(Total de estudiantes)}} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 0.25 \longrightarrow 0.25 \times 100 = 25(\%)$$

Al multiplicar el número decimal por 100 se obtiene el porcentaje.



La relación entre el número decimal y el porcentaje es la siguiente:



Para convertir un número decimal a porcentaje, se multiplica el número decimal por 100 y se escribe el símbolo “%”.

Para convertir un porcentaje a un número decimal, se divide entre 100.

- Convierta cada número decimal a porcentaje.
  - 0.56
  - 0.07
  - 0.3
  - 0.69
- Convierta cada porcentaje a un número decimal.
  - 23%
  - 47%
  - 8%
  - 60%

## Sección 6 Porcentajes Clase 2 Una cantidad es porcentaje de otra cantidad

A una fiesta de cumpleaños se invitaron 200 personas y llegaron solo 60 personas. ¿Cuál es el porcentaje de las personas que asistieron a la fiesta con respecto al total de invitados?

La razón de las personas que asistieron a la fiesta con respecto al total de invitados es  $60 : 200$ .

El porcentaje se puede calcular:

Forma 1.  
Utilizando el concepto de proporción.

Forma 2.

Multiplicando el valor de razón por 100.

Si  $a : b = c : d$ , entonces  $ad = bc$ .

$$60 : 200 = x : 100$$

$$60 \times 100 = 200x$$

$$200x = 60 \times 100$$

$$200x = 6,000$$

$$\frac{200x}{200} = \frac{6,000}{200}$$

$$x = 30$$

Por tanto, 30%.

$$\frac{60}{200} = 0.3 \quad \text{Se determina el valor de razón.}$$

$$0.3 \times 100 = 30$$

Por tanto, 30%.

Respuesta: el porcentaje de personas que asistieron a la fiesta fue 30%.

Para expresar una cantidad como porcentaje de otra:

Paso 1. Se toma la cantidad que se compara como numerador.

Paso 2. Se toma la cantidad base (total) como denominador.

Paso 3. Se convierte a porcentaje.

- Se invitaron a 150 personas al acto del día de la madre de primero básico sección “C”. Llegaron 135 personas. ¿Cuál es el porcentaje de invitados que llegaron al acto?
- En la final de un campeonato de fútbol, Regina lanzó 5 veces al marco, de las cuales anotó 3 goles. ¿Cuál es el porcentaje de goles anotados respecto al número de lanzamientos?
- Daniel tiene 30 dulces, de los cuales regaló 18 a su hermana. ¿Cuál es el porcentaje de dulces que regaló?
- El papá de José tiene un ingreso mensual de Q1,300.00. De esta cantidad, ahorra Q260.00 cada mes. ¿Qué porcentaje de su ingreso mensual ahorra?

## Sección 6 Porcentajes Clase 3 Porcentaje de cantidades

**P**

En el salón municipal de Cuyotenango, Suchitepéquez, hubo un concierto de marimba para 200 personas. Sin embargo, solo el 80% de las personas compraron boletos.  
¿Cuántas personas compraron boletos?

**S**

Multiplique el porcentaje por el total de personas, puede ser escrito de forma decimal o como fracción.

$$\begin{aligned} \text{Decimal:} \quad & 80\% \times 200 = 0,8 \times 200 \\ & = 160 \\ \text{Fracción:} \quad & 80\% \times 200 = \frac{80}{100} \times 200 \\ & = \frac{80 \times 200}{100} \\ & = 160 \end{aligned}$$

Respuesta: equivale a 160 personas.

**C**

Para encontrar la cantidad que representa un porcentaje, se multiplica el porcentaje dado por la cantidad total. Un porcentaje puede ser expresado en decimal o en fracción con denominador 100.

**E**

- Un pequeño equipo de fútbol jugó 10 partidos en un torneo. De estos, ganó el 70% de los partidos. ¿Cuántos partidos ganó este equipo?
- Sofía organizó un club de lectura con 100 personas. A la primera reunión se presentó el 40% de los miembros. ¿Cuántas personas se presentaron a la primera reunión?
- Un agricultor tiene 3,000 m<sup>2</sup> para sembrar, de estos solo siembra en el 60% de los m<sup>2</sup>. ¿Cuántos m<sup>2</sup> siembra él?
- Un instituto tiene 400 alumnos inscritos. El 40% de los alumnos son mujeres. ¿Cuántas mujeres están inscritas en el instituto?

## Sección 6 Porcentajes Clase 4 Descuentos

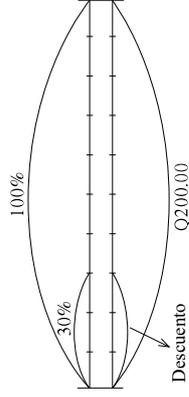
**P**

Una zapatería de Quetzaltenango está de aniversario y por este motivo ofrece varias ofertas a los clientes.  
Katy va a la zapatería y compra unas zapatillas cuyo precio normal es de Q200.00, pero por el aniversario hubo un descuento del 30%.

- ¿A cuántos quetzales equivale ese descuento?
- ¿Cuánto pagó por las zapatillas?

**S**

- Encuentre el descuento calculando el 30% de Q200.00.



El descuento es una operación que reduce el precio original.

$$\begin{aligned} \text{(Descuento)} \\ &= (\text{Porcentaje de descuento}) \times (\text{precio original}) \\ &= 30\% \times 200 \\ &= \frac{30}{100} \times 200 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Respuesta: el descuento es de Q60.00.

- Para conocer cuánto pagó por las zapatillas:

$$Q200.00 - Q60.00 = Q140.00$$

Respuesta: pagó Q140.00.

**C**

$$\begin{aligned} \text{Descuento} &= \text{porcentaje de descuento} \times \text{precio original} \\ \text{Precio de venta} &= \text{precio original} - \text{descuento} \end{aligned}$$

**E**

- Encuentre el descuento y el precio en quetzales que se paga de las siguientes cantidades.
  - A Q500.00 se le descuenta el 10%.
  - A Q700.00 se le descuenta el 6%.
  - A Q800.00 se le descuenta el 12%.
- Alberto compró una camisa. Su precio normal era de Q350.00, pero le hicieron un descuento del 20%.
  - ¿A cuánto equivale el descuento?
  - ¿Cuánto pagó Alberto por la camisa?

## Sección 6 Porcentajes Clase 5 Intereses

**P**

Se invierte Q10,000.00 a una tasa de interés del 10% anualmente. Encuentre el interés y el monto en la tabla.

A la cantidad de dinero que se obtiene como beneficio al invertir dinero se le llama **interés**.



Tiempo (después)	Interés	Monto
1 año		
2 años		
3 años		

**S**

La tasa de interés anual es 10%.

$$10\% \times 10,000 = 0.1 \times 10,000 = 1,000$$

El interés anual es Q1,000.00.

Después de 1 año,  
El interés: Q1,000.00  
Monto: Q10,000.00 + 1 × Q1,000.00 = Q11,000.00

Después de 2 años,  
El interés: 2 × Q1,000.00 = Q2,000.00  
Monto: Q10,000.00 + 2 × Q1,000.00 = Q12,000.00

Después de 3 años,  
El interés: 3 × Q1,000.00 = Q3,000.00  
Monto: Q10,000.00 + 3 × Q1,000.00 = Q13,000.00

Tiempo (después)	Interés	Monto
1 año	Q1,000.00	Q11,000.00
2 años	Q2,000.00	Q12,000.00
3 años	Q3,000.00	Q13,000.00

**C**

Interés anual = tasa de interés × capital  
Monto = capital + tiempo × interés anual

**E**

- a. Q30,000.00 son invertidos a una tasa de interés del 5% anualmente. Encuentre el monto total después de 3 años.
- b. Q4,500.00 son invertidos a una tasa de interés del 6% anualmente. Encuentre el monto total después de 2 años.

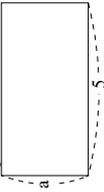
## Unidad 2 Álgebra

### Ejercitación A

- Represente las siguientes expresiones algebraicas sin el signo “ $\times$ ” y “ $\div$ ”.
  - $6 \times a$
  - $x \div 3$
  - $x \times y \times 2$
  - $a \div (-4)$
  - $-3 \times z \times y \times x$
  - $a \times a$
  - $b \times (-4) \times b \times c$
  - $-1 \times (a + b)$
  - $(a + b) \div 2$
  - $1 \times (a - b)$
  - $(x + y) \div (-5)$
- Represente las siguientes situaciones con expresiones algebraicas.
  - Alberto compró 3 naranjas. Si una naranja cuesta  $x$  quetzales, represente el precio total.
  - Carmen pagó  $y$  quetzales para comprar 10 caramelos. Represente el precio por un caramelo.
- Represente las siguientes expresiones algebraicas sin el signo “ $\times$ ” y “ $\div$ ”.
  - $x \div 4 + 5 \times y$
  - $a \div 2 + 6 \times b$
  - $7 \times x - 3 \times y \times y$
- Encuentre el valor numérico de la expresión  $5x + 1$ .
  - $x = 2$
  - $x = -3$
- Encuentre todos los términos y el coeficiente cada variable de las siguientes expresiones algebraicas.
  - $2x - 9y$
  - $-4a - 8b + 1$
- Reduzca las siguientes expresiones.
  - $4x + 3x$
  - $5x - x$
  - $-3a + 8a$
  - $2x - 1 + 6x - 5$
  - $-4a + 8 - 5a - 6$
  - $7x - 2x - 3x - 11$
- Calcule las siguientes expresiones.
  - $4x \times (-5)$
  - $10x \div (-5)$
  - $-6a \times 2$
  - $2(x + 7)$
  - $(10a - 4) \div 2$
  - $-3(x - 5)$
  - $(9x + 27) \div (-3)$
- Identifique las ecuaciones que tienen como solución el número 3.
  - $3x + 2 = 8$
  - $5x - 5 = 10$
  - $-2x + 6 = 12$
- Resuelva las siguientes ecuaciones.
  - $x - 3 = 5$
  - $-4 + x = 1$
  - $x + 9 = 11$
  - $7 + x = -2$
  - $\frac{1}{3}x = 5$
  - $-\frac{x}{5} = 6$
  - $3x = 18$
  - $-7x = 21$
  - $2x + 8 = 10$
  - $-3x + 6 = -3$
  - $\frac{x}{4} + 2 = 4$
  - $\frac{x}{2} - 8 = -3$
  - $3x = x + 4$
  - $6x = -20 + 2x$
  - $x = -5x + 2$
- Encuentre el valor del término  $x$  en las siguientes proporciones.
  - $x : 3 = 2 : 6$
  - $2 : x = 6 : 15$
- La razón de la medida de la base a la altura de una piscina es 3 : 8. Si la base mide 9 m, ¿cuánto medirá la altura?
  - $3x = x + 4$
  - $6x = -20 + 2x$
  - $x = -5x + 2$
- Convierta las siguientes unidades de longitud a las medidas indicadas.
  - 3 km a m
  - 5 m a cm
  - 10 mm a cm
- Convierta las siguientes unidades de área a las medidas indicadas.
  - 3 cm<sup>2</sup> a mm<sup>2</sup>
  - 7 m<sup>2</sup> a cm<sup>2</sup>
  - 4 km<sup>2</sup> a m<sup>2</sup>
- Resuelva.
  - Lucía gastó 100 quetzales de 500 quetzales que tenía en su cartera. ¿Cuál es el porcentaje del monto gastado?
  - Flora compró un pantalón con un descuento del 30%. Si el precio normal es de 2000 quetzales, ¿cuánto pagó por el pantalón?
  - Domingo invierte Q8,000.00 quetzales a una razón de interés del 5% anualmente. Encuentre el monto después de un año.

### Ejercitación B

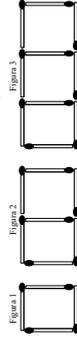
- Represente las siguientes expresiones algebraicas utilizando el signo "×" y "÷":
  - $2a$
  - $5xy$
  - $\frac{b}{5}$
  - $\frac{xy}{4}$
  - $2x^3 + 8y^2$
  - $\frac{a}{2} + \frac{b}{5}$
  - $\frac{a}{4} - 9y^4$
  - $\frac{5}{x} - 11y^2$
  - $-7(x+y)$
- Represente las siguientes situaciones con expresiones algebraicas.
  - Lisa compró 3 tomates a  $x$  quetzales cada uno. Si pagó con un billete de 10 quetzales, represente su vuelto.
  - Mario corre a una rapidez constante " $v$ " km/h. Si corre 2 horas, represente cuántos kilómetros avanza.
  - Represente el área del rectángulo que está abajo.



- Encuentre el valor numérico de la expresión  $10 - 4x^2$  si:
  - $x = 2$
  - $x = -3$
- Si  $2^{x+2} = 64$ , determine el valor de  $2^{x-2}$ .
- Calcule las siguientes expresiones.
  - $2x \times \left(-\frac{1}{6}\right)$
  - $-\frac{a}{5} \times 9$
  - $\frac{3}{4}x \div \left(-\frac{3}{2}\right)$
  - $12\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)$
  - $(16a - 8) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$
- Resuelva las siguientes ecuaciones.
  - $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
  - $-\frac{1}{7} + x = 1$
  - $4x + 5 = 3$
  - $18x - 2 = 7$
  - $-2x = 6x + 24$
  - $2.5x - 4 = 1.5x + 1$
  - $5(x - 4) = x$
  - $2(4x - 6) = 8 - 2x$
- Plantee la siguiente situación como una ecuación y resuelva.  
Emanuel pagó 90 quetzales para comprar 3 cuadernos a  $x$  quetzales cada uno y un libro a 72 quetzales.
- Encuentre el valor del término  $x$  en las siguientes proporciones.
  - $2.5 : 4.5 = 10 : x$
  - $2 : x = \frac{1}{3} : \frac{1}{7}$
- Resuelva.  
En una fiesta, la razón del número de hombres al de mujeres es 2 : 3. Si hay 60 mujeres, ¿cuántas personas hay en total?
- Convierta las unidades de longitud a las medidas indicadas.
  - 700 m a km
  - 1,200 cm a m
  - 250 mm a cm
- Convierta las unidades de área a las medidas indicadas.
  - 250 mm<sup>2</sup> a cm<sup>2</sup>
  - 1.5 km<sup>2</sup> a m<sup>2</sup>
  - 350,000 cm<sup>2</sup> a m<sup>2</sup>

- Resuelva.
  - Anita tiene un jardín de 80 m<sup>2</sup>. En el jardín las flores están plantadas en 20 m<sup>2</sup> y el resto del área es para verduras. ¿Cuál es el porcentaje del área para verduras?
  - Francisco compró un sombrero cuyo precio normal es de Q200.00, pero ese día había una oferta especial y pagó solo Q140.00. ¿Cuál es el porcentaje del descuento?

- Se utilizan fósforos para construir las siguientes figuras. Si se continúa la misma secuencia, determine cuántos fósforos se usarían para hacer la figura 30.



Relación 2  
Contradominio Dominio

Relación 3  
Dominio Contradominio

# Unidad 3 ...

# Función



## Sección 1 Conjuntos

### Clase 3 Gráfica del producto cartesiano



Dados los siguientes conjuntos, ubique los pares ordenados de  $A \times B$  en un plano cartesiano.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

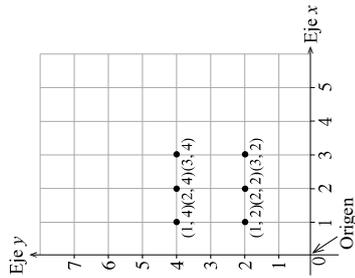
$$B = \{2, 4\}$$



El **plano cartesiano** está formado por dos rectas perpendiculares, y a cada recta se le llama eje de coordenada. La recta horizontal es el **eje x**, y la vertical el **eje y**. Al punto donde se intersecan los ejes de coordenadas se le llama **origen**. Un punto del plano cartesiano le corresponde a un único par ordenado  $(x, y)$ , donde  $x$  representa la posición horizontal desde el origen y  $y$  representa la posición vertical desde el origen. El par ordenado del origen es  $(0, 0)$ .

A continuación, en el plano cartesiano se representan los pares ordenados de:

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}.$$



Para ubicar el par ordenado  $(1, 2)$ , se cuenta 1 unidad a partir del origen hacia la derecha, y a partir de esto, se cuentan 2 unidades hacia arriba.

Para ubicar el par ordenado  $(1, 4)$ , se cuenta 1 unidad a partir del origen hacia la derecha, y a partir de esto, se cuentan 4 unidades hacia arriba.

De la misma manera se representan los demás pares ordenados.



Para ubicar un par ordenado  $(x, y)$  en el plano cartesiano:

1. Cuando el valor de  $x$  es positivo, se cuentan las unidades a partir del origen hacia la derecha, y cuando el valor de  $x$  es negativo, se cuentan las unidades a partir del origen hacia la izquierda.
2. Cuando el valor de  $y$  es positivo, se cuentan las unidades a partir del origen hacia arriba; y cuando el valor de  $y$  es negativo, se cuentan las unidades a partir del origen hacia abajo.



Dados los siguientes conjuntos:

$$C = \{1, 2\}$$

$$D = \{3, 6, 9\}$$

- a. Encuentre  $C \times D$ .
- b. Ubique los pares ordenados en un plano cartesiano.

## Sección 2 Relaciones y funciones

### Clase 1 Concepto de relación



Dados los siguientes conjuntos:

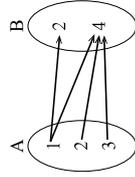
$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

- a. Encuentre los pares ordenados  $(x, y)$ , donde  $x$  es un elemento del conjunto  $A$  y  $y$  es un elemento del conjunto  $B$ , tal que  $y$  es mayor que  $x$ .
- b. Encuentre los pares ordenados  $(x, y)$ , donde  $x$  es un elemento del conjunto  $A$  y  $y$  es un elemento del conjunto  $B$ , tal que  $y$  es el doble de  $x$ .
- a. Los pares ordenados  $(x, y)$ , donde  $y$  es mayor que  $x$  son:  $(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4)$ .

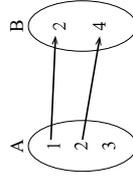


En diagrama de Venn se representa así:



- b. Los pares ordenados  $(x, y)$ , donde  $y$  es el doble de  $x$  son:  $(1, 2), (2, 4)$ .

En diagrama de Venn se representa así:



Una **relación** es una correspondencia entre dos conjuntos, tales que, a cada elemento del primer conjunto se le asigna uno o más elementos del segundo conjunto.

Al primer conjunto se le llama **dominio** de la relación y al segundo conjunto se le llama **contradominio**.



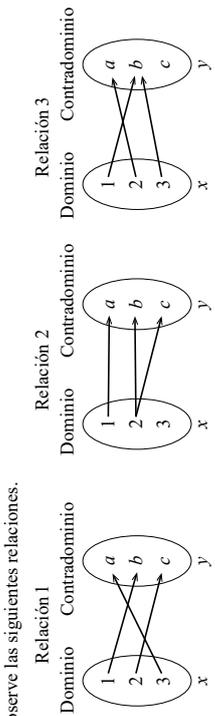
Dados los conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ , encuentre los pares ordenados de la relación utilizando la regla de correspondencia indicada en cada inciso.

- a. Relación  $A \rightarrow B$ : el segundo elemento es el cuadrado del primero.
- b. Relación  $B \rightarrow A$ : el primer elemento es menor que el segundo elemento.

## Sección 2 Relaciones y funciones

### Clase 2 Concepto de función

Observe las siguientes relaciones.

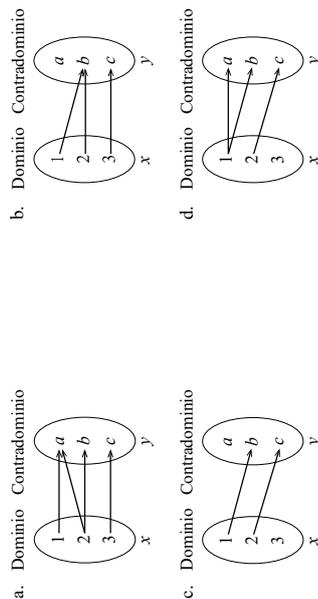


- ¿Cada elemento del dominio tiene correspondencia con un elemento del codominio?
- ¿Cada elemento del dominio tiene un solo elemento correspondiente en el codominio?

- Relación 1: sí, sus pares ordenados son  $(1, a)$ ,  $(2, b)$  y  $(3, c)$ .  
Relación 2: no, 2 tiene dos elementos correspondientes en el codominio.  
Relación 3: sí, sus pares ordenados son  $(1, a)$ ,  $(2, a)$  y  $(3, b)$ .
- Relación 1: sí, sus pares ordenados son  $(1, a)$ ,  $(2, c)$  y  $(3, a)$ .  
Relación 2: no, 2 tiene dos elementos correspondientes en el codominio.  
Relación 3: sí, sus pares ordenados son  $(1, b)$ ,  $(2, a)$  y  $(3, b)$ .

Se dice que una relación entre dos conjuntos es **función** si cada elemento en el primer conjunto (dominio) tiene un solo elemento correspondiente en el segundo conjunto (codominio). Por ejemplo, en el caso de las relaciones de arriba, la relación 1 y 3 son funciones, pero la 2 no es función.

Analice si los siguientes diagramas muestran una relación de función.



## Sección 3 Proporcionalidad directa

### Clase 1 Concepto de proporcionalidad directa

En la sastería de Agustín se confeccionan chumpas. La siguiente tabla muestra la relación entre el número de chumpas y el consumo de telas.

a. Complete la tabla.

$x$ (chumpa)	1	2	3	4	5
$y$ (yarda de tela)	2	4	6	8	10
$y \div x$	2				

b. Represente  $y$  en términos de  $x$ .

- a. Asigne  $x$  al número de chumpas y  $y$  al número de yardas de tela utilizada.

$x$ (chumpa)	1	2	3	4	5
$y$ (yarda de tela)	2	4	6	8	10
$y \div x$	2	2	2	2	2

En todas las divisiones de  $y \div x$ , el cociente es 2. A este número se le llama constante de proporcionalidad.

- a. A partir de esta tabla se construye la relación.
- $$y = 2x$$
- $\swarrow$  Constante de proporcionalidad  
 $\leftarrow$  Variable independiente  
 $\searrow$  Variable dependiente
- b. A partir de esta tabla se construye la relación.

Cuando  $y$  se expresa de la forma  $y = ax$ , se dice que  $y$  es **directamente proporcional** a  $x$ , y  $a$  es la **constante de proporcionalidad**.

1. Complete la tabla y calcule la constante de proporcionalidad, donde  $y$  es directamente proporcional a  $x$ .

$x$ (chuchitos)	1	2	3	4	5
$y$ (quetzales)	3				

2. Complete la tabla y exprese la ecuación de la forma  $y = ax$  según los valores de la tabla.

$x$ (pantalones)	1	2	3	4	5
$y$ (yardas)	4				

3. Complete la tabla y calcule la constante de proporcionalidad. Exprese la ecuación de la forma  $y = ax$ .

$x$	1	2	3	4	5
$y$	5				

Sección 3 Proporcionalidad directa  
Clase 3 Proporcionalidad directa con valores negativos en las variables ( $a < 0$ )

**P** Hay una fuga de agua en un recipiente a un ritmo constante de 2 cm de altura por minuto, tal como se muestra en el dibujo. Dado que el tiempo de este momento es 0 minutos y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, determine la relación entre  $x$  minutos después y la altura  $y$  cm con respecto a la línea media.

Hace 1 min (-1 min)      Ahora (0 min)      Dentro de 1 min (+1 min)

- a. Complete la tabla.
- |           |    |    |    |    |   |    |    |   |   |
|-----------|----|----|----|----|---|----|----|---|---|
| $x$ (min) | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  | 3 | 4 |
| $y$ (cm)  |    |    | 4  | 2  | 0 | -2 | -4 |   |   |
- b. Escriba la relación entre las variables en la forma de  $y = ax$ .  
c. ¿Se puede decir que  $y$  es directamente proporcional a  $x$ ?

**S** El valor de  $-4$  para  $x$  significa 4 minutos antes. Un valor negativo para  $y$  significa que está debajo de la línea media del recipiente. La constante es igual a  $\frac{y}{x}$ .

- S** a. Complete la tabla.
- |           |    |    |    |    |   |    |    |    |    |
|-----------|----|----|----|----|---|----|----|----|----|
| $x$ (min) | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  |
| $y$ (cm)  | 8  | 6  | 4  | 2  | 0 | -2 | -4 | -6 | -8 |
- b. Al dividir cada uno de los valores dados de  $y$  entre los de  $x$ , el resultado es  $-2$  (constante de fuga de agua a cada minuto).

$x$ (min)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$ (cm)	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
$\frac{y}{x}$	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2

- c. Como la constante de proporcionalidad es  $-2$ , entonces  $y = -2x$ . Si es directamente proporcional a  $x$ , porque se representa como  $y = ax$ . Cuando el valor de  $x$  cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de  $y$  correspondiente también cambia por 2, 3, 4... Por ejemplo, cuando  $x$  es 2, 3, 4, el valor de  $y$  es  $-4$ ,  $-6$ ,  $-8$ . Cuando el valor de  $x$  es  $-2$ ,  $-3$ ,  $-4$ , el valor de  $y$  es 4, 6, 8.

**C** En una proporcionalidad directa, hay casos en que la constante es negativa. Es decir, el valor de  $a$  puede ser negativo ( $a < 0$ ) en la ecuación  $y = ax$ .

- E** Tomando como referencia el problema inicial y considerando que pierde 3 cm de altura por minuto: a. Complete la tabla.
- |           |    |    |    |   |    |   |   |
|-----------|----|----|----|---|----|---|---|
| $x$ (min) | -3 | -2 | -1 | 0 | 1  | 2 | 3 |
| $y$ (cm)  |    |    |    | 0 | -3 |   |   |
- b. Escriba la relación entre las variables en la forma de  $y = ax$ .  
c. ¿Se puede decir que  $y$  es directamente proporcional a  $x$ ?

Sección 3 Proporcionalidad directa  
Clase 2 Proporcionalidad directa con valores negativos en las variables ( $a > 0$ )

**P** Se vierte agua en un recipiente a ritmo constante de 2 cm de altura por minuto tal como se muestra en el dibujo. Dado que el tiempo en este momento es 0 minutos y la línea media del recipiente es 0 cm de altura, encuentre la relación entre  $x$  minutos después y la altura  $y$  cm arriba de la línea media.

Hace 1 min (-1 min)      Ahora (0 min)      Dentro de 1 min (+1 min)

- a. Complete la tabla.
- |           |    |    |    |    |   |   |   |   |   |
|-----------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| $x$ (min) | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ (cm)  |    |    |    | -2 | 0 | 2 |   |   |   |
- b. Represente la altura  $y$  cm de la forma  $y = ax$ , sustituyendo el valor de  $a$ .  
c. ¿Se puede decir que  $y$  es directamente proporcional a  $x$ ?

a.

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

Al dividir cada uno de los valores de  $y$  entre los valores de  $x$ , el resultado es 2 (constante de flujo del agua por cada minuto).

b.

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$\frac{y}{x}$	2	2	2	2	2	2	2	2	2

- c. Como la constante de proporcionalidad es 2, entonces  $y = 2x$ . Si es directamente proporcional a  $x$ , porque se representa de la forma  $y = ax$ . Cuando el valor de  $x$  cambia al ser multiplicado por 2, 3, 4..., el valor de  $y$  correspondiente también cambia por 2, 3, 4... Por ejemplo, cuando  $x$  es 2, 3, 4..., el valor de  $y$  es 4, 6, 8... Así mismo con negativos, cuando el valor de  $x$  es  $-2$ ,  $-3$ ,  $-4$ ..., el valor de  $y$  es  $-4$ ,  $-6$ ,  $-8$ ...

**C** Aunque unas variables tomen valores negativos, las características de proporcionalidad siempre se cumplen. Es decir, las variables pueden tomar valores negativos en una **proporcionalidad directa**.

- E** 1. Tomando como referencia el problema inicial y considerando que se vierte el agua a flujo constante de 3 cm de altura por minuto. a. Complete la tabla.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	-9			0		6	

- b. Escriba la ecuación en forma de  $y = ax$ .  
2. Complete la tabla que muestra la relación de proporcionalidad directa, y escriba la ecuación en forma de  $y = ax$ .
- |     |    |    |    |    |   |   |   |   |   |
|-----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ |    |    |    | -4 | 0 | 4 | 8 |   |   |

## Sección 3 Proporcionalidad directa

### Clase 4 Ecuación de una proporcionalidad directa



Si  $y$  es directamente proporcional a  $x$ , cuando  $x = 4$  y  $y = 12$ , represente la relación entre las variables en forma de  $y = ax$ .



Como ya se conocen los valores de  $x$  y  $y$ , solamente se necesita encontrar el valor de  $a$ .



Para encontrar el valor de  $a$ , sustituya los valores de  $x$  y  $y$  en la ecuación  $y = ax$  con  $x = 4$  y  $y = 12$ .

$$12 = a \times 4$$

$$12 = 4a$$

$$4a = 12$$

$$\frac{4a}{4} = \frac{12}{4}$$

$$a = 3$$

Entonces,  $y = 3x$ .



Para representar una relación de proporcionalidad directa de la forma  $y = ax$ , dado el valor de  $x$  y el valor de  $y$ :

- Paso 1. Se sustituyen los valores de las variables en la ecuación  $y = ax$ .  
 Paso 2. Se encuentra el valor de la constante  $a$  en la ecuación.  
 Paso 3. Se sustituye el valor de la constante en  $y = ax$ .



Si  $y$  es directamente proporcional a  $x$ , encuentre el valor de la constante  $a$  en  $y = ax$ ,  $y$  represente la relación en la forma  $y = ax$ .

- a.  $x = 5, y = 20$       b.  $x = 2, y = 14$       c.  $x = 3, y = 18$   
 d.  $x = 5, y = -15$       e.  $x = -6, y = 24$       f.  $x = 4, y = -28$   
 g.  $x = -7, y = 35$       h.  $x = -3, y = 30$       i.  $x = 3, y = 21$   
 j.  $x = -2, y = 32$       k.  $x = 6, y = -42$       l.  $x = 9, y = -36$

## Sección 3 Proporcionalidad directa

### Clase 5 Gráfica de una proporcionalidad directa ( $a > 0$ )



En las siguientes tablas, se muestran los pares ordenados de  $x$  y  $y$ , directamente proporcionales, que se relacionan mediante la expresión  $y = 2x$ .

- a. Ubique los pares ordenados de la tabla 1 en el plano cartesiano.

Tabla 1

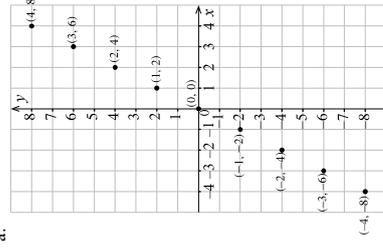
$x$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y$	...	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	...

- b. Ubique los pares ordenados de la tabla 2 en el plano cartesiano.

Tabla 2

$x$	...	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	...
$y$	...	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

- c. Si el número de puntos, cuyos pares ordenados son  $x$  y  $y$  de  $y = 2x$ , se incrementa más, ¿qué se formará con estos puntos?



Con estos puntos se forma una recta. Esta recta es la gráfica de la proporcionalidad directa  $y = 2x$ .



Los pares ordenados que corresponden a  $y = ax$  forman una línea recta. A esta recta se le llama gráfica de  $y = ax$ .

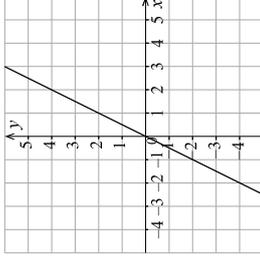


Trace la gráfica de  $y = 3x$  a partir de la siguiente tabla.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	-9	-6	-3	0	3	6	9

Sección 3 Proporcionalidad directa  
Clase 7 Ecuación de una proporcionalidad directa a partir de una gráfica

Determine la ecuación de proporcionalidad directa  $y = ax$  que represente la siguiente gráfica.



**P**

Sustituyendo un par ordenado en  $y = ax$ , se puede encontrar la constante  $a$ . Como la gráfica pasa por el punto  $(1, 2)$ , al sustituir los valores en  $x$  y  $y$ , se obtiene:

$$y = ax$$

$$2 = a \times 1$$

$$a = 2$$

Entonces,  $y = 2x$ .

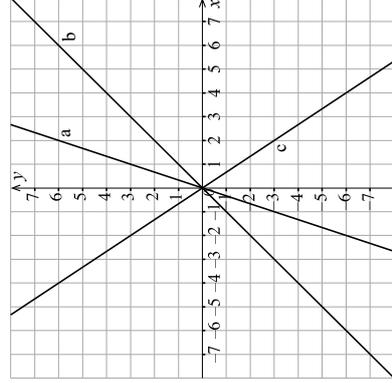
**S**

**C**

Para determinar una ecuación  $y = ax$  a partir de una gráfica:

- Paso 1. Se elige un punto (par ordenado) por el que pasa la gráfica, cuyos valores sean números enteros.
- Paso 2. Se sustituyen los valores  $x$  y  $y$  del par ordenado en  $y = ax$ , y se encuentra el valor de la constante  $a$ .
- Paso 3. Se escribe la ecuación de proporcionalidad  $y = ax$ , utilizando el valor de  $a$  encontrado en el paso 2.

Determine la ecuación de proporcionalidad directa  $y = ax$  para  $a$ ,  $b$  y  $c$ , a partir de las gráficas.



**E**

Sección 3 Proporcionalidad directa  
Clase 6 Gráfica de una proporcionalidad directa ( $a < 0$ )

Trace la gráfica de  $y = -2x$ .

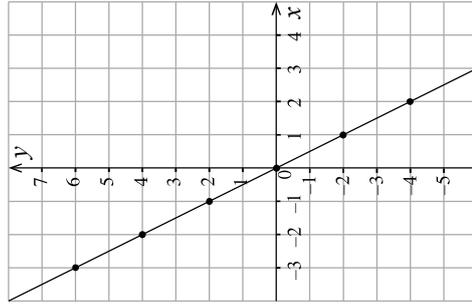
**P**

a. ¿Cuál es el punto común por el que pasan las gráficas de  $y = -2x$  y  $y = 2x$ , que fue realizada en la clase anterior?

b. ¿Cuántos puntos se necesitan conocer para trazar la gráfica de una proporcionalidad directa? ¿Cuáles son?

$x$	...	-3	-2	-1	0	1	2	...
$y$	...	6	4	2	0	-2	-4	...

**S**



Para encontrar un punto que pertenezca a la gráfica, se sustituye un valor de  $x$  en  $y = ax$  y se calcula  $y$ .



a. El punto común por el que pasan las gráficas de proporcionalidad directa es  $(0, 0)$ . Tanto la gráfica de la clase anterior como esta gráfica pasan por el origen, donde el eje  $x$  se cruza con el eje  $y$ .

b. Para trazar la gráfica de proporcionalidad directa, se necesitan dos puntos, el origen  $(0, 0)$  y otro punto.

**C**

Para trazar una gráfica de proporcionalidad directa ( $y = ax$ ), se necesitan dos puntos: el origen  $(0, 0)$  y otro punto. Luego, se unen los dos puntos y se prolonga la recta.

Realice la gráfica de cada proporcionalidad directa.

- a.  $y = -3x$
- b.  $y = -4x$
- c.  $y = -x$
- d.  $y = -\frac{x}{2}$

**E**

Sección 3 Proporcionalidad directa  
Clase 8 Relación entre tabla, gráfica y ecuación de una proporcionalidad directa

Identifique la relación entre la tabla, la ecuación y la gráfica de  $y = 3x$ .



Tabla

$x$	...	-2	-1	0	1	2	...
$y$	...	-6	-3	0	3	6	...

+1 +1 +1 +1

$\times 3$   $\times 3$   $\times 3$   $\times 3$

+3 +3 +3 +3

Cuando el valor de  $x$  aumenta 1, el valor de  $y$  aumenta 3.

$\frac{y}{x} = 3$

Ecuación de proporcionalidad directa

$y = 3x$

Constante  $a$

Gráfica



La relación entre la tabla, la ecuación de proporcionalidad directa y la gráfica en términos de una constante  $a$ , se representa a continuación.

Tabla	Ecuación de proporcionalidad directa	Gráfica
Valor de $\frac{y}{x}$ cuando $x \neq 0$	$a$	Valor de $y$ cuando $x = 1$



1. Encuentre el valor de la constante  $a$  de la relación de los valores  $x$  y  $y$  en los siguientes incisos.

a.

$x$	...	-2	-1	0	1	2	...
$y$	...	-10	-5	0	5	10	...

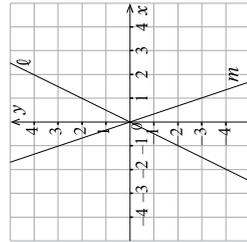
b.

$x$	...	-2	-1	0	1	2	...
$y$	...	4	2	0	-2	-4	...

2. Encuentre el valor de la constante  $a$  de las siguientes ecuaciones.

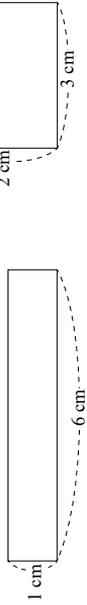
- a.  $y = -4x$   
b.  $y = 6x$

3. Encuentre el valor de la constante  $a$  de las gráficas de  $\ell$  y  $m$ .



Sección 4 Proporcionalidad inversa  
Clase 1 Concepto de una proporcionalidad inversa

Se tienen varios rectángulos cuya área es de  $6 \text{ cm}^2$ .



Considerando que la medida de la base es  $x \text{ cm}$  y la altura es  $y \text{ cm}$ , resuelva.

a. Complete la tabla.

$x$	1	2	3	4	5	6	...
$y$	6				1.2		...

- b. Escriba la expresión algebraica para encontrar el área de los rectángulos utilizando  $x$  y  $y$ .  
c. Represente  $y$  en términos de  $x$ .



a.

$x$	1	2	3	4	5	6	...
$y$	6	3	2	1.5	1.2	1	...

- b. La ecuación que representa el área de los rectángulos es  $xy = 6$ . Es decir,  $x$  veces  $y$  es siempre 6.

c. Al resolver la ecuación para  $y$  se obtiene:

$$xy = 6$$

$$\frac{xy}{x} = \frac{6}{x}$$

$$y = \frac{6}{x}$$



Cuando  $y$  se expresa de la forma  $y = \frac{a}{x}$ , se dice que  $y$  es **inversamente proporcional** a  $x$  y  $a$  es la constante de proporcionalidad.



- a. Calcule la constante de proporcionalidad y determine si las parejas de datos de la siguiente tabla son inversamente proporcionales.

$x$	1	2	3	4	...	6	...	12
$y$	12	6	4	3	...	2	...	1

- b. Complete la tabla aplicando la ecuación  $y = \frac{24}{x}$  para la constante de proporcionalidad  $a = 24$ .

$x$	1	2	3	4	...	8	...	12	...	24
$y$	24									

## Sección 4 Proporcionalidad inversa

### Clase 2 Proporcionalidad inversa con valores negativos en las variables

**P**

Verifique si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , a partir de la siguiente tabla.

$x$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y$	...	-3	-4	-6	-12	$\times$	12	6	4	3	...

**S**

Para verificar si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , compruebe que el resultado de  $xy$ , es decir, la constante  $a$  sea siempre el mismo.

$x$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y$	...	-3	-4	-6	-12	$\times$	12	6	4	3	...
$xy$	...	12	12	12	12	$\times$	12	12	12	12	...

El resultado de  $xy$  es 12, entonces  $y = \frac{12}{x}$ .  
Por tanto, se puede decir que  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ .

**C**

Cuando  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , aunque  $x$  tome valores negativos, la constante de proporcionalidad  $a$  se mantiene.

**E**

1. Verifique si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ .

a.

$x$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y$	...	-1.5	-2	-3	-6	$\times$	6	3	2	1.5	...

b.

$x$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y$	...	-8	-6	-4	-2	$\times$	2	4	6	8	...

2. Cuando  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , complete las tablas e identifique la constante  $a$ .

a.

$x$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y$	...	-8	-8	-8	-24	$\times$			8		...

b.

$x$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y$	...	4.5				$\times$	-18			-4.5	...

## Sección 4 Proporcionalidad inversa

### Clase 3 Ecuación de una proporcionalidad inversa

**P**

Si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , cuando  $x = 2$ ,  $y = 3$ , represente la relación entre las variables de la forma  $y = \frac{a}{x}$ .

**S**

Como se sabe el valor de  $x$  y  $y$ , sustituya y encuentre el valor de  $a$ .

Utilizando  $y = \frac{a}{x}$ ,  
cuando  $x = 2$ ,  $y = 3$ :

$$3 = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = 3$$

$$\frac{a}{2} \times 2 = 3 \times 2$$

$$a = 6$$

Entonces,  $y = \frac{6}{x}$ .

Como ya se conocen los valores de  $x$  y  $y$ , solamente necesita encontrar el valor de  $a$ .



## Unidad 3 Función

**C**

Para representar una relación de proporcionalidad inversa de la forma  $y = \frac{a}{x}$ , a partir de algunos valores determinados de las variables:

Paso 1. Se sustituyen los valores de las variables en la ecuación  $y = \frac{a}{x}$ .

Paso 2. Se encuentra el valor de la constante  $a$  en la ecuación.

Paso 3. Se sustituye el valor de la constante en  $y = \frac{a}{x}$ .

**E**

Si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , represente los siguientes incisos de la forma  $y = \frac{a}{x}$ .

a. Cuando  $x = 4$ ,  $y = 5$

b. Cuando  $x = 5$ ,  $y = 3$

c. Cuando  $x = -2$ ,  $y = 2$

d. Cuando  $x = -4$ ,  $y = 3$

e. Cuando  $x = 3$ ,  $y = -1$

f. Cuando  $x = -1$ ,  $y = -6$

Sección 4 Proporcionalidad inversa

Clase 4 Gráfica de una proporcionalidad inversa ( $a > 0$ )

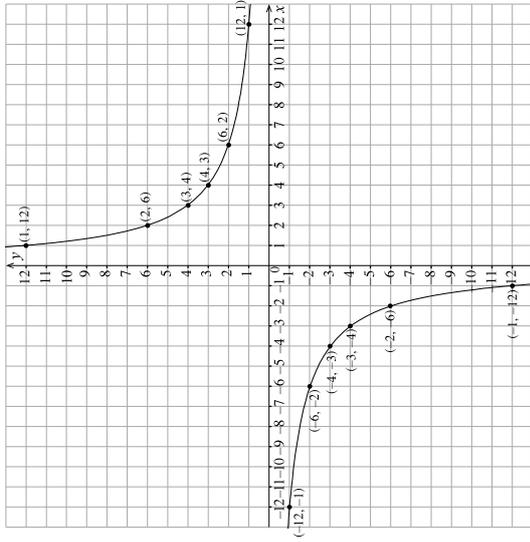


Para la siguiente relación de proporcionalidad inversa  $y = \frac{12}{x}$ , elabore la gráfica en el plano cartesiano.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-3	-4	-6	-12		12	6	4	3	...



Ubique los puntos en el plano cartesiano, utilizando las coordenadas de la tabla.



Otros puntos como (6, 2), (12, 1), (-6, -2), (-12, -1) ayudan a elaborar la gráfica. Si se toman más puntos, se forman curvas.



Sección 4 Proporcionalidad inversa

Clase 5 Gráfica de una proporcionalidad inversa ( $a < 0$ )

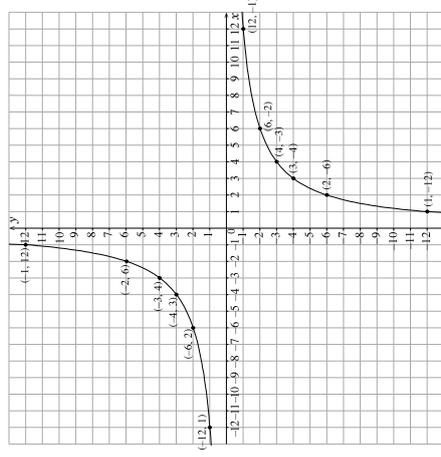


Elabore la gráfica en el plano cartesiano para la siguiente relación de proporcionalidad inversa  $y = -\frac{12}{x}$ .

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	3	4	6	12		-12	-6	-4	-3	...



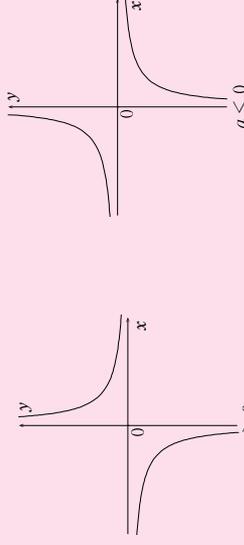
Ubique los puntos en el plano cartesiano, utilizando los pares ordenados de la tabla.



Otros puntos como (6, -2), (12, -1), (-6, 2), (-12, 1) ayudan a elaborar la gráfica.



Una gráfica de proporcionalidad inversa depende del valor de la constante  $a$ , tal como se muestra a continuación.



Elabore la gráfica a partir de la tabla.

a.  $y = -\frac{6}{x}$

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	1.5	2	3	6		-6	-3	-2	-1.5	...

b.  $y = -\frac{18}{x}$

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	4.5	6	9	18		-18	-9	-6	-4.5	...



Si se ubican las coordenadas de  $y = \frac{12}{x}$ , entonces su representación gráfica son dos líneas curvas.

La gráfica de una proporcionalidad inversa son dos líneas curvas.



Complete la tabla que representa la proporcionalidad inversa y elabore la gráfica en el plano cartesiano.

a.  $y = \frac{6}{x}$

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-1.5					6			1.5	...

b.  $y = \frac{18}{x}$

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...		-6				18		6		...

### Ejercitación A

- Dado el siguiente conjunto, escriba  $\in$  o  $\notin$  en el espacio indicado.  
 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$   
 a.  $10 \square A$       b.  $1 \square A$
- Dados los conjuntos:  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{3, 6, 9\}$ , encuentre el producto cartesiano de  $A \times B$ .

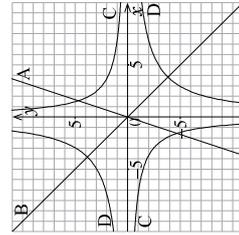
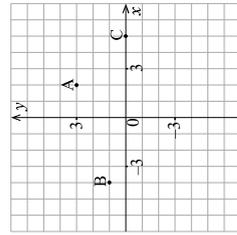
3. Encuentre el diagrama que muestra una relación de función.

a. Dominio Contradominio      b. Dominio Contradominio      c. Dominio Contradominio

- Resuelva los siguientes problemas.
  - Complete la tabla y calcule la constante de proporcionalidad, donde  $y$  es directamente proporcional a  $x$ .
  - Complete la tabla y calcule la constante de proporcionalidad, donde  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ .
- Represente los siguientes incisos de la forma  $y = ax$ , si  $y$  es directamente proporcional a  $x$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	-12			0			

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$						30	



- Represente los siguientes incisos de la forma  $y = \frac{d}{x}$ , si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ .
  - $x = 2, y = 8$       b.  $x = 4, y = -3$
- Identifique los pares ordenados de los puntos A, B y C de acuerdo a la gráfica.

8. Determine la ecuación de proporcionalidad directa e inversa a partir de las gráficas de A, B, C y D.

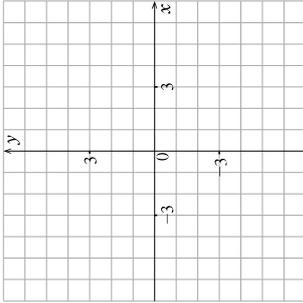
### Ejercitación B

- Identifique las características de la proporcionalidad directa.
  - Cuando el valor de  $x$  cambia multiplicando por 2, 3, 4, el valor de  $y$  correspondiente también cambia multiplicando por 2, 3, 4.
  - Cuando el valor de  $x$  cambia multiplicando por 2, 3, 4, el valor de  $y$  correspondiente cambia multiplicando por  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ .
  - El resultado de la multiplicación " $x \times y$ " es constante.
  - El resultado de la división " $y \div x$ " es constante.
- Relacione cada una de las ecuaciones a, b y c con la explicación que le corresponde.

- a.  $y = 2x$       b.  $y = \frac{2}{x}$       c.  $y = -3x$

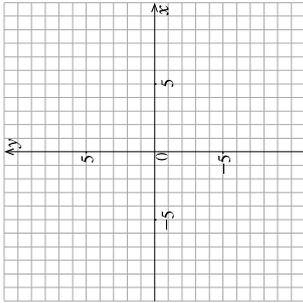
- (1) La gráfica de esta función pasa por el punto  $(1, -3)$ .  
 (2) La gráfica de esta función son dos líneas curvas.  
 (3) La gráfica de esta función pasa por el punto  $(-1, -2)$ .

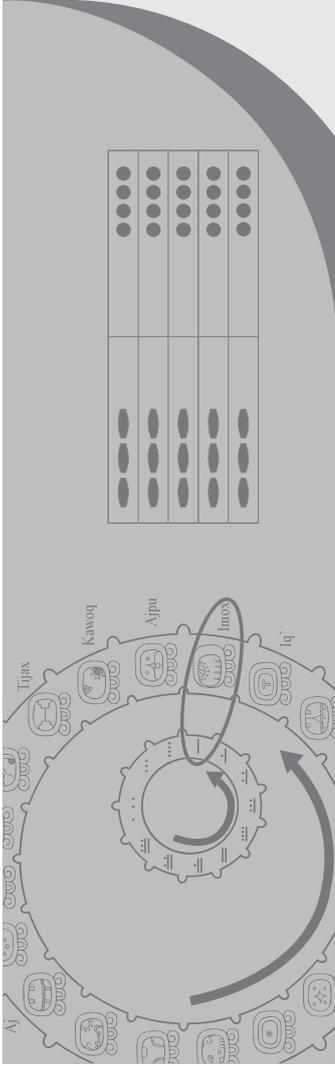
- Ubique los siguientes puntos en el plano cartesiano.
- $(4, 1)$
- $(-2, -5)$
- $(0, -2)$



4. Grafique las siguientes proporcionalidades directas e inversas.

- a.  $y = -2x$       b.  $y = \frac{1}{2}x$       c.  $y = \frac{10}{x}$       d.  $y = -\frac{8}{x}$





# Unidad 4

## Unidad 4 Etnomatemática

### Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento maya Clase 1 Ciclos: 1 día (Q'ij), 20 días (Winaq), 260 días (Cholq'ij) y 365 días (Ab')

**P**

- ¿Qué es un ciclo en el pensamiento maya?
- ¿Cuáles son los ciclos más pequeños del tiempo en el pensamiento maya?

**S**

- Un ciclo es continuo y se presenta en forma espiral, donde el final de un ciclo es el inicio del siguiente. En el pensamiento maya, el tiempo norma las actividades naturales y sociales de la vida. Por ejemplo:  
Ciclo de la vida de una persona: desde la concepción hasta su muerte (nacimiento, juventud, adultez y muerte).  
Ciclo del tejido: desde la preparación de los materiales, urdido, tejido y comercialización, hasta el uso de la prenda.  
Ciclo del cultivo: preparación del terreno, siembra, limpia, cosecha y nuevamente preparación del terreno.

- Los ciclos más pequeños del tiempo en el pensamiento maya son:  
Q'ij (1 día): equivale al periodo que tarda el Sol en recorrer el ciclo visible y no visible, que empieza con los primeros destellos del Sol en el horizonte hasta completar su ciclo.  
Winaq (20 días): es el periodo de tiempo que abarca 20 unidades del Q'ij. Es llamado también mes vigesimal, por la estrecha relación con el sistema de numeración vigesimal.  
Cholq'ij (260 días): es el periodo de tiempo que abarca 13 Winaq, es decir,  $13 \times 20 = 260$  Q'ij. Es llamado también Calendario Sagrado.  
Ab' (365 días): es el periodo de tiempo que abarca 18 Winaq, es decir,  $18 \times 20 = 360$  Q'ij más 5 días llamados Wayeb'. Es llamado también Calendario Solar.

**C**

El pensamiento maya es cíclico y se presenta en forma espiral, donde el fin de un ciclo es el inicio de otro.  
Las unidades de tiempo más pequeñas que se utilizan para medir los ciclos mayas son: Q'ij, Winaq, Cholq'ij y Ab'.

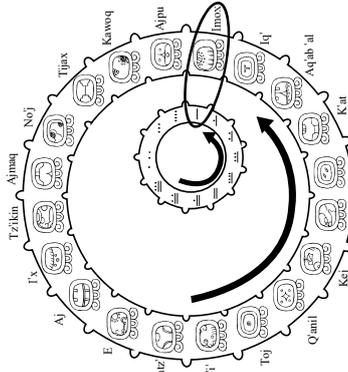
**E**

- Responda.
- ¿Cómo se llama el periodo de tiempo más corto de los mayas?
  - ¿Qué nombre recibe en idioma maya el periodo de tiempo compuesto de 20 días?
  - ¿Cuántos días tiene el periodo de tiempo conocido como Ab'?
  - ¿Qué nombre reciben los 5 días que se adicionan a los 360 días del periodo Ab'?

# Etnomatemática

**Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento maya**  
**Clase 2 Secuencia del 13 y 20 en el Cholq'ij**

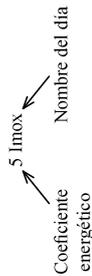
Según el pensamiento maya, ¿qué representa la relación del numeral 13 con 20 días?



La relación del 13 y el 20 está expresada en el Calendario Sagrado o Cholq'ij, compuesto por 13 coeficientes numéricos y 20 días con sus respectivos nombres o nawales, como se muestra en la figura que está a la derecha. Los 20 días corresponden a un mes en el Cholq'ij.

En la figura se muestra el día 5 Imox, el siguiente día es 6 Iq y el día anterior es 4 Ajpu. Note que las ruedas giran de derecha a izquierda, contrario a las manecillas del reloj, como lo muestran las flechas de la figura.

Este día del Cholq'ij está formado por los siguientes elementos:



La combinación de los 13 coeficientes energéticos y los 20 días forma el año sagrado de 260 días ( $13 \times 20 = 260$ ).

La secuencia del 13 y 20 es una relación que los abuelos y abuelas utilizaron para contar el tiempo. Se considera como uno de los sistemas calendáricos más avanzados en la historia de la humanidad.

El día del Cholq'ij está formado por un nivel energético y un nombre. La combinación de los 13 coeficientes energéticos y los 20 días forma el año sagrado de 260 días.

Realice.

- Utilice las ruedas calendáricas anteriores para completar el primer mes, comenzando en 1 No'j, 2 Tijax, y así sucesivamente hasta llegar a 7 Ajmaq.
- Continúe con el segundo mes siguiendo la secuencia anterior, comenzando en 8 No'j.
- ¿Cuál será el primer día del tercer mes, siguiendo la secuencia calendárica?

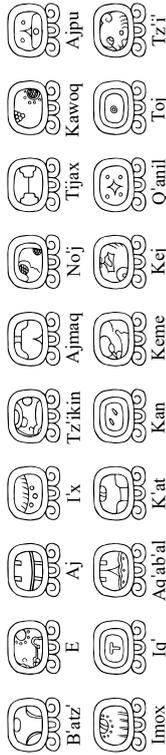
**Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento maya**  
**Clase 3 Días del calendario maya y su significado**

¿Qué significado tienen los días del calendario maya?

Un mes del calendario maya tiene 20 días, cada día tiene un nombre y una representación simbólica o glifo. El significado de cada día puede ser literal o interpretado. En este texto se presenta una interpretación básica de cada día. Si se desea profundizar con la interpretación, se debe consultar a los abuelos y abuelas ajq'ijab' o contadores del tiempo.

	Nombre del día (k'iche')	Significado literal	Interpretación básica general
1	B'atz'	Mono, hilo	Nawal de las artes, tejidos y artistas
2	E	Camino, diente	Nawal de los caminos y dirigentes
3	Aj	Caña, cañaveral	Nawal de la casa y de los niños
4	I'x	Jaguar	Nawal de la naturaleza y de los altares
5	Tz'ikin	Péjaro	Nawal del bienestar económico y fortuna
6	Ajmaq	Falta, culpa	Nawal de todas las faltas
7	No'j	Inteligencia	Nawal de la inteligencia, día para pedir sabiduría
8	Tijax	Obsidiana	Nawal de la muerte repentina y los sufrimientos
9	Kawoq	Trueno, dificultad	Nawal de los pleitos, día de la mujer y de curación
10	Ajpu	Divinidad	Nawal del sol, día para pedir sabiduría y fortaleza
11	Imox	Lagarto, locura	Nawal del mar, ríos y lagos.
12	Iq'	Viento, Luna	Nawal del aire y la Luna, del espíritu del ser humano
13	Aq'ab'al	Amanecer, mano	Nawal de la claridad, día para pedir luz en las cosas
14	K'at	Red, cautiverio	Nawal de las cárceles visibles e invisibles. Guardiador
15	Kan	Serpiente	Nawal de la creación del hombre y de la mujer
16	Keme	Renovación, muerte	Nawal de la muerte, día para pedir que se aleje la muerte. La muerte es considerada complemento de la vida.
17	Kej	Venado, autoridad	Nawal de animales cuadrúpedos. Día para pedir fuerzas.
18	Q'anil	Semilla	Nawal de semillas de animales y vegetales.
19	Toj	Ofrenda, pago	Nawal de los cuatro señores del fuego
20	Tz'i'	Perro	Nawal de la justicia, autoridad material y espiritual

Glifos de los días del calendario maya:



La mayoría de los nombres de los días del calendario maya se refieren a plantas y animales de la tierra y del cielo. La interpretación del significado de cada día son patrones que se repiten en la naturaleza dilucidada por los ajq'ijab'. El ajq'ij es una persona que construye la explicación personal según las características del día.

1. Relacione el nombre del día con su significado literal, utilice una línea para indicar dicha relación.

- |           |      |         |        |       |         |
|-----------|------|---------|--------|-------|---------|
| B'atz'    | I'x  | Tijax   | Imox   | Kan   | Tz'i'   |
| Obsidiana | Hilo | Semilla | Jaguar | Perro | Lagarto |

2. Dibuje dos glifos de su preferencia.

Sección 2 El universo y sus cuadrantes  
Clase 1 Centro cósmico y sus energías

- P**
- ¿Qué es el centro cósmico?
  - ¿Cómo se relaciona el centro cósmico con las energías?

**S**

a. El centro cósmico es el punto donde convergen las energías de los cuatro cuadrantes del plano horizontal, así como los tres niveles cósmicos en lo vertical. Este punto para los Mayas es la quinta dirección del mundo, la parte espiritual, y también es llamado ombligo.

Los cuatro cuadrantes del plano horizontal de la tierra se presentan así: donde sale el Sol, donde cae el Sol, donde viene el viento y hacia donde se dirige el viento. Los cuadrantes forman lo que se denomina cruz cósmica.

Los tres niveles en el plano vertical: el supramundo o espacio celeste donde se encuentran los abuelos y abuelas que nos antecedieron; el mundo terrestre, donde se encuentran el ser humano, las plantas, los animales y las cosas; y el X'ib'alb'a, que es el espacio oscuro.

- b. El centro cósmico se relaciona con los cinco guardianes o nawales de cada cuadrante y con la energía positiva del supramundo y la energía negativa del X'ib'alb'a.

El cuadrante que corresponde a la salida del Sol es representado por el fuego y sus nawales son: Toj, Kan, Imox, No'j, Aj.

El cuadrante de la caída del Sol es representado por la tierra y sus nawales son: B'atz', Tz'ikin, Kawoq, Aq'ab'al y Kej.

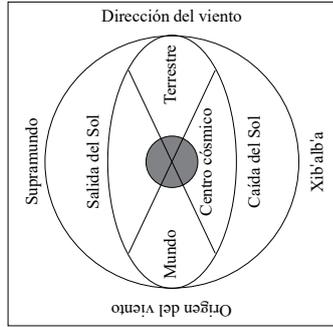
El cuadrante donde se origina el viento es representado por el aire y sus nawales son: Iq', Tijax, I'x, Keme y Tz'i'.

El cuadrante donde se dirige el viento es representado por el agua y sus nawales son: E, Ajmaq, Ajpu, Q'anil y K'at.

**C**

El centro cósmico es el punto donde convergen las energías de los cuatro cuadrantes del plano horizontal, así como los tres niveles cósmicos en lo vertical. Es el punto que ayuda al ser humano a ubicarse en el tiempo y en el espacio. Así mismo, es donde inicia a dinamizarse cualquier energía.

- E**
- Responda.
    - ¿Qué tipo de energía se encuentra en el supramundo?
    - ¿Qué otro nombre recibe el centro cósmico?
    - ¿Qué nombre recibe cada cuadrante del plano horizontal?
      - Salida del Sol
      - Caída del Sol
      - Origen del viento
      - Dirección del viento
  - Escriba dos nawales que correspondan a cada cuadrante.



Sección 2 El universo y sus cuadrantes  
Clase 2 Movimiento del Sol: equinoccios y solsticios

¿Cómo descubrieron los equinoccios y solsticios los Mayas del periodo clásico?

**S**

Los Mayas observaron el Sol para producir conocimientos en Matemática, Astronomía, Arquitectura, medición del tiempo, entre otros. Realizaron construcciones acordes con el movimiento del Sol para determinar el tiempo que duraba el año solar o ciclo 'Ab' y sus estaciones. Entre las ciudades con observatorios más importantes se pueden mencionar Uuxactun, Chichén Itza, Copán, entre otros.

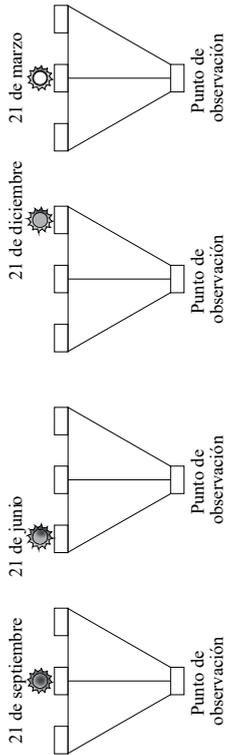
Según la figura que está a la derecha, se pueden determinar las posiciones del Sol en la fase de los equinoccios y solsticios. En los equinoccios, las horas del día son iguales a las de la noche. El equinoccio de primavera es el 21 de marzo y el equinoccio de otoño el 21 de septiembre. Estas fechas son importantes porque en algunas comunidades del altiplano marcaban el inicio de la siembra y de la cosecha, respectivamente.

El solsticio de verano es el 21 de junio, que se caracteriza por el día más largo que la noche. Esta fecha es el momento mágico, de purificación para la bendición de la abundancia y la jovialidad. El solsticio de invierno es el 21 de diciembre, que se caracteriza por el día más corto que la noche.

**C**

Los Mayas lograron determinar las fechas de los solsticios y equinoccios a través de la observación de los movimientos del Sol. Se construyeron los puntos de observación a este efecto.

- E**
- Observe los diagramas de un observatorio maya y escriba el nombre de la posición de la salida del Sol según su referencia.



- En grupo, discutan cómo construir un centro de observación del Sol en el instituto.

### Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento maya Clase 1 3, 4 y 7 como patrones en el pensamiento maya

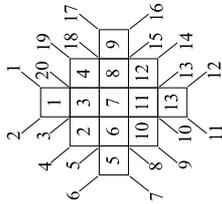
**P** ¿Qué significado tiene el 3, 4 y 7 en el pensamiento maya?



**S** El 3 está representado en el cosmos a través de los tres puntos cósmicos en el plano vertical: Supramundo, Mundo Terrestre y el Xib'alb'a. También está representado en las tres bases de la piedra de moler y en los tres tenamastes o piedras que sustentan el comal. La piedra de moler y el comal tienen un gran significado en la cultura Maya porque son instrumentos que se utilizan para la preparación de los alimentos para las personas. El 3 también representa lo femenino y la naturaleza.

El 4 significa los cuatro cuadrantes del cosmos en el plano horizontal. También está representado en las 4 extremidades de la persona, los 4 colores del maíz y los 4 hombres de la mitología maya. El 4 representa al hombre y los 4 pilares del hogar.

El 7 es el centro de los trece niveles de energía del Chol'ij, como se observa en la siguiente imagen. El 7 representa la familia.



**C** 3, 4 y 7 tienen un significado práctico y espiritual.

**E** Relacione los números de la izquierda con su significado de la derecha a través de una línea.

- 7 Supramundo, Mundo Terrestre y Xib'alb'a.
- 4 Centro de las trece fuentes de energía.
- 3 Cuadrantes del cosmos en el plano horizontal o extremidades del ser humano.

### Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento maya Clase 2 Patrones en el tejido maya

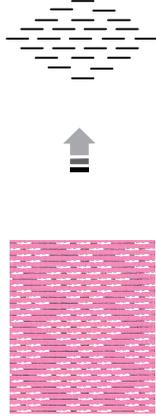
**P** ¿Qué secuencias de figuras se observan en los siguientes tejidos?



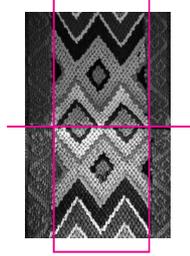
Gütipil de Momostenango, Totonicapán

Gütipil de San Juan Comalapa, Chimaltenango

**S** a. En el gütipil de Momostenango se observan líneas blancas que forman figuras con secuencias numéricas, según la cantidad de líneas 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3,...

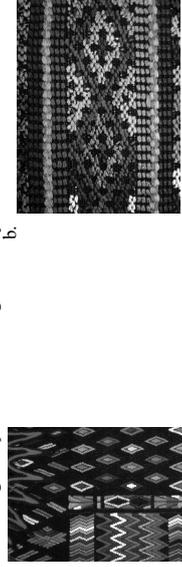


b. En el gütipil de San Juan Comalapa se observa que en la franja señalada en el recuadro, los colores y las figuras forman secuencias y simetría alrededor de la línea vertical e involucran otras nociones matemáticas que son transmitidas de generación a generación por las tejedoras.



**C** A una secuencia repetida de figuras o números se le llama patrón. En el tejido maya se encuentran diferentes tipos de patrones geométricos, que las tejedoras transmiten de generación en generación.

**E** Encuentre algunos patrones en los siguientes tejidos.



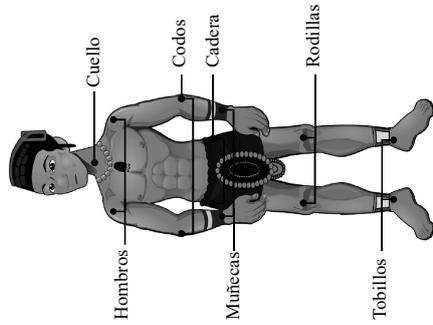
Gütipil de Chichicastenango, Quiché

Gütipil de San Martín Jilotepeque, Chimaltenango

### Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento maya Clase 3 Trece articulaciones del cuerpo humano y trece energías

- P**
- ¿Dónde se encuentran las 13 articulaciones del cuerpo humano?
  - ¿Qué significado tienen las 13 articulaciones?

- S**
- El cuerpo humano tiene 13 articulaciones: 2 hombros, 2 codos, 2 muñecas, 2 caderas, 2 rodillas, 2 tobillos y 1 cuello, como se muestran en la imagen que está a la derecha.



- Las 13 articulaciones tienen un gran significado en la cosmovisión maya. Algunos autores consideran el 13 como el número místico y entre sus significados en la actualidad se tienen los 13 niveles energéticos de los días del Cholq'ij. Estos 13 niveles energéticos se combinan con los 20 nawales del Cholq'ij, lo que da como resultado 260 tipos y niveles de personalidad.

Además, el 13 crea grandes ciclos de tiempo que son motivo de conmemoración maya: La vuelta del trece k'atun (oxlajuj k'atun) está compuesta de 13 periodos de 20 años:  $13 \times 20 = 260$  años. La era maya (oxlajuj b'ak'tun) está compuesta de 13 periodos de 400 años:  $13 \times 400 = 5,200$  años.

- C**
- El 13 está relacionado con las trece articulaciones principales de la persona. El 13 representa los niveles energéticos que combinados con los 20 nawales del mes maya dan como resultado 260 tipos de energía.

- E**
- Con base en la siguiente imagen, identifique las 13 articulaciones principales según el pensamiento maya.



- Responda.
  - Según el pensamiento maya, ¿cuántos niveles de energía hay?
  - ¿Cuántos años tiene una era maya (oxlajuj b'ak'tun)?

### Sección 4 Sistemas numéricos Clase 1 Matemática Maya y sus características: referencial y cíclico

**P** ¿En qué consiste la característica referencial y cíclica en el pensamiento matemático maya?

**S** El desarrollo del pensamiento matemático maya se ha realizado con base en referencias existentes en las prácticas cotidianas de las comunidades. Por ejemplo: El sistema de numeración de base 20 tiene como referencia a la persona o winaq: 5 dedos en cada mano y 5 dedos en cada pie.

Muchos pueblos fundados en la época colonial tienen una distribución geográfica acorde a los cuatro sectores cósmicos del universo y un quinto sector, denominado sagrado, que se ubica en el centro del pueblo. La referencia es la salida y caída del Sol, y el origen y la dirección del viento. Para determinar la distancia entre surcos en la siembra del maíz se utiliza como unidad de medida el cabo de azadón. El cabo de azadón tiene una longitud de cinco cuartas, que es equivalente a un metro.

Además, el pensamiento matemático maya es cíclico, derivado de las observaciones astronómicas que cumplen cierta periodicidad, como el movimiento de las estrellas, el Sol o la Luna. Según el pensamiento maya el ciclo no es cerrado, sino que el inicio de un ciclo es el final de otro ciclo, y así sucesivamente en forma espiral. Por ejemplo:

Según el Calendario Sagrado toda vida es cíclica y cada momento del ciclo tiene su propia razón. Los ciclos del tiempo de las trece vueltas dan origen al año lunar o sagrado ( $13 \times 20 = 260$  días), la vuelta del 13 k'atun ( $13 \times 20 = 260$  años), la era maya u oxlajuj b'ak'tun ( $13 \times 400 = 5,200$  años), entre otros.

Los ciclos de los equinoccios y solsticios marcan actividades importantes, como la siembra del maíz realizada después del equinoccio de primavera, así como la celebración del saq q'ij en el solsticio de verano.

**C** El pensamiento matemático maya se forja en el desarrollo del pensamiento referencial y cíclico. Los patrones reflejan los fenómenos naturales.

**E** Identifique con una R si el enunciado pertenece a lo referencial y una C si pertenece a lo cíclico.

- Distribución geográfica de los pueblos creados en la época colonial
- La vida de una persona
- Los cuadrantes del cosmos y sus energías
- El sistema de numeración vigesimal
- El 13 b'ak'tun
- La siembra y cosecha del maíz

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 2 Sistema de numeración vigesimal



¿Qué número representa  $\equiv$  en sistema decimal?

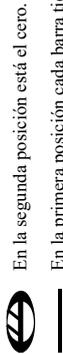


Para facilitar la representación de los números mayas se sugiere conocer la relación de equivalencia entre el sistema decimal y el sistema vigesimal. Observe el siguiente cuadro:

Posición en el sistema vigesimal	Potenciación	Valor equivalente en el sistema decimal
Quinta posición	$20^4$	$\equiv = 5 \times 20^4 = 800,000$ $\bullet = 1 \times 20^4 = 160,000$
Cuarta posición	$20^3$	$\equiv = 5 \times 20^3 = 40,000$ $\bullet = 1 \times 20^3 = 8,000$
Tercera posición	$20^2$	$\equiv = 5 \times 20^2 = 2,000$ $\bullet = 1 \times 20^2 = 400$
Segunda posición	$20^1$	$\equiv = 5 \times 20^1 = 100$ $\bullet = 1 \times 20^1 = 20$
Primera posición	$20^0$	$\equiv = 5 \times 20^0 = 5$ $\bullet = 1 \times 20^0 = 1$

•• En la cuarta posición cada punto del sistema vigesimal tiene un valor de 8,000 del sistema decimal. Dos puntos serán 16,000 ( $2 \times 8,000$ ).

••• En la tercera posición cada barra tiene un valor de 2,000 y cada punto 400. Una barra y cuatro puntos serán 3,600 ( $1 \times 2,000 + 4 \times 400$ ).



En la segunda posición está el cero.

En la primera posición cada barra tiene un valor de 5. Una barra es  $5 (1 \times 5)$ .

El valor acumulado da un total de 19,605 ( $16,000 + 3,600 + 0 + 5$ ).

El número maya representa 19,605 en el sistema decimal.



El sistema de numeración maya de base 20 se conoce como sistema de numeración vigesimal. Utiliza 20 significaciones, resumidas por los mayas del período clásico en tres símbolos:

concha, punto y barra que representan cero, uno y cinco, respectivamente. Por lo general en Aritmética, la escritura de cantidades utiliza los siguientes criterios: el punto se puede escribir hasta cuatro veces en cada posición, la barra hasta tres veces y la concha una vez.

Ejemplo:

¿Cómo se representa el año 2018 en números mayas?

Para escribir 2018 se utiliza la tabla de equivalencia vista anteriormente. La tabla indica que se debe iniciar la escritura en la tercera posición, donde una barra tiene un valor de 2,000. Se continúa en la segunda posición donde un punto vale 20; en este caso no se podría utilizar el punto porque llegaría a 2020. Se baja a la primera posición donde una barra vale 5 y un punto 1, entonces, 18 se forma con 3 barras y 3 puntos.

El 2018 en numeración vigesimal se escribe  $\equiv \equiv \equiv$ .



1. Expresé los siguientes números en sistema decimal.

- a.  $\equiv \equiv \equiv$       b.  $\equiv \equiv \equiv \equiv$       c.  $\equiv \equiv$

2. Escriba los números en sistema vigesimal.

- a. 532      b. 1,488      c. 3,175

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 3 Representación de cantidades en el Ábaco Maya



a. ¿Qué es el Ábaco Maya?

b. Los días de un ciclo de la rueda calendárica, que es una combinación del Cholq'ij y Ch'olab' son 18,980. Utilice el Ábaco Maya para representar esa cantidad de días.



a. El Ábaco Maya es un instrumento de cálculo que contiene los principios básicos del sistema de numeración vigesimal.

Fue diseñado por el matemático educativo Domingo Yojoom. Para utilizarlo es importante conocer sus características:

Tiene dos secciones. En el lado izquierdo, están las cuentas ovaladas, que representan las barras, cuyo valor es 5 en sistema decimal. En el lado derecho están las cuentas redondas, que representan los puntos, cuyo valor es 1.

Los espacios horizontales indican las posiciones, que se cuentan de abajo hacia arriba. Cada posición vertical tiene su valor. Los puntos de cada posición tienen los valores 1, 20, 400, 8,000, 160,000 de abajo hacia arriba. Las barras de cada posición tienen los valores 5, 100, 2,000, 40,000, 800,000.

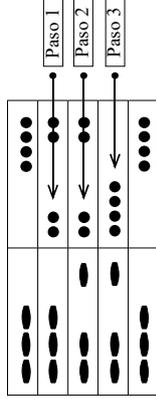
Para formar los números se deslizan las barras y puntos hacia el centro.

b. Para representar 18,980:

Paso 1. En la cuarta posición, se desliza 2 puntos al centro del ábaco, para representar 16,000.

Paso 2. En la tercera posición, se desliza 1 barra y 2 puntos al centro del ábaco para representar 2,800.

Paso 3. En la segunda posición, se desliza 1 barra y 4 puntos al centro del ábaco para representar 180. En la primera posición no se desliza ninguna cuenta.



$\equiv \equiv$	$2 \times 8,000$	16,000
$\equiv \equiv \equiv \equiv$	$(1 \times 2,000) + (2 \times 400)$	2,800
$\equiv \equiv \equiv \equiv \equiv \equiv$	$(1 \times 100) + (4 \times 20)$	180
$\bullet$	$(0 \times 1)$	+
		18,980



El uso del Ábaco Maya en el proceso de aprendizaje facilita la comprensión del sistema vigesimal, permitiendo la utilización de objetos tangibles para la representación de cantidades. Para representar una cantidad en el Ábaco Maya es necesario saber los valores en cada posición de abajo hacia arriba. Los valores son:

Punto: 1, 20, 400, 8,000, 160,000...

Barra: 5, 100, 2,000, 40,000, 800,000...



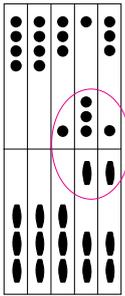
Represente las siguientes cantidades en el Ábaco Maya.

- a. 2,375      b. 2,532      c. 5,200      d. 10,000

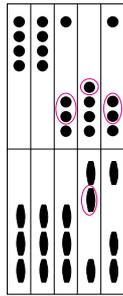
Sección 4 Sistemas numéricos  
Clase 4 Suma utilizando el Ábaco Maya

**P** Utilice el Ábaco Maya para obtener el resultado de  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} + \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$ .

**S** Paso 1. Se forma el primer sumando, comenzando de arriba hacia abajo.



Paso 2. Se agrega el segundo sumando, comenzando de arriba hacia abajo.



Por tanto,  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} + \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} = \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$

**G** Para sumar cantidades en el sistema de numeración vigesimal con el uso del Ábaco Maya:

Paso 1. Se anota el primer sumando en el ábaco.

Paso 2. Se agrega el segundo sumando.

Paso 3. Se lee el resultado.

**E** Utilice el Ábaco Maya para encontrar el resultado de los siguientes incisos.

a.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} + \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$       b.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} + \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$       c.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} + \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$

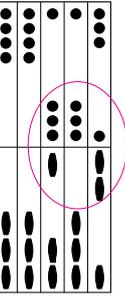
d.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} + \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$       e.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} + \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$       f.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} + \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$



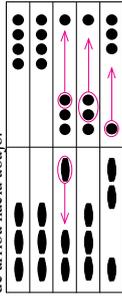
Sección 4 Sistemas numéricos  
Clase 5 Resta utilizando el Ábaco Maya

**P** Utilice el Ábaco Maya para obtener el resultado de  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} - \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$ .

**S** Paso 1. Se representa el minuendo, comenzando de arriba hacia abajo.



Paso 2. Se quita el valor del sustraendo, alineando las cuentas operadas a los extremos, comenzando de arriba hacia abajo.



Por tanto,  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} - \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} = \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$

**G** Para restar cantidades en el sistema de numeración vigesimal con el uso del Ábaco Maya:

Paso 1. Se representa el minuendo en el ábaco.

Paso 2. Se quita el valor del sustraendo.

Paso 3. Se lee el resultado.

**E** Utilice el Ábaco Maya para encontrar el resultado de los siguientes incisos.

a.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} - \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$       b.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} - \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$       c.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} - \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$

d.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} - \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$       e.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} - \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$       f.  $\begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} - \begin{array}{r} \cdot \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$



**Sección 4 Sistemas numéricos**  
**Clase 6 ☞ (cero) y su significado**

**P** ¿Cuál es el significado del ☞ (cero) en el pensamiento maya?

**S** El ☞ (cero) es el principio y el fin, porque es donde emerge y culmina la energía. Es la representación del todo, la esencia; permite escalar una posición más en el tiempo y en el espacio. Para la representación del principio y fin se utilizan cuatro símbolos:



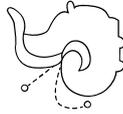
La semilla representa el inicio y el fin de una vida. Significa que todo está contenido en ella. Es la representación del todo.



La cabeza es la representación del pensamiento y la meditación. Es el símbolo del todo.



La cruz maya significa el todo, representa las cuatro direcciones cósmicas en lo horizontal y en lo vertical. Es el origen, así como la convergencia de las energías.

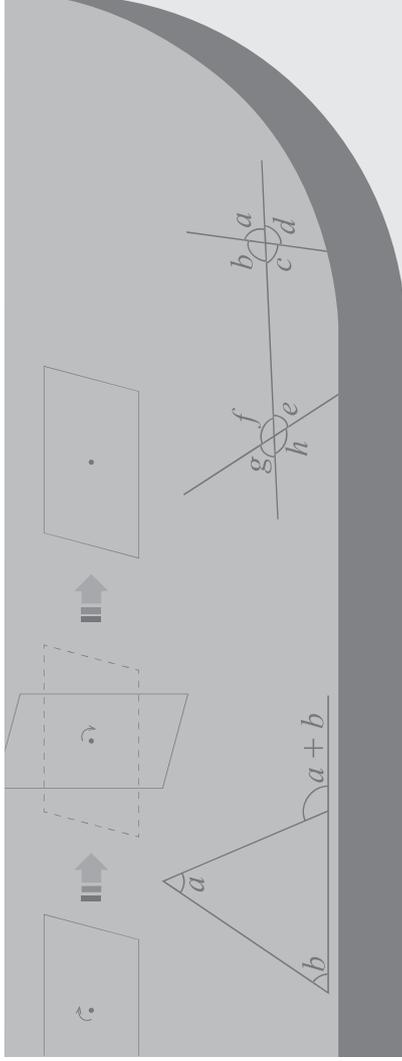


El caracol representa el principio y el fin. Es el símbolo de la espiral ascendente que también representa el tiempo.

**C** El ☞ (cero) representa el principio y el fin. Es el fin de un ciclo y el inicio de otro. Representa el todo.

**E** Identifique el enunciado que está relacionado con el ☞ (cero) desde el pensamiento maya.

- a. La persona o winaq
- b. El caracol
- c. La Luna
- d. El principio y el fin
- e. El todo
- f. La semilla
- g. El Sol
- h. Las cuatro direcciones cósmicas



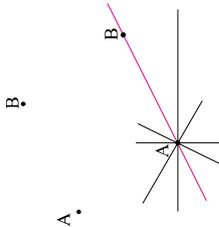
# Unidad 5

# Geometría

## Sección 1 Elementos básicos de línea y ángulo

### Clase 1 Punto, recta, segmento, rayo y plano

- P<sup>1</sup>**
- Trace líneas rectas que pasen por el punto A.
  - Trace líneas rectas que pasen por los puntos A y B.



- S<sup>1</sup>**
- Se puede trazar varias líneas rectas que pasen por el punto A.
  - Se puede trazar solo una línea recta que pase por los puntos A y B.

**C<sup>1</sup>**

A una línea recta que pasa por los puntos A y B y que se extiende infinitamente se le llama **recta AB**, y se simboliza como  $\overleftrightarrow{AB}$ .

A la parte delimitada entre los puntos A y B de la recta AB se le llama **segmento AB**, y se simboliza como  $\overline{AB}$ .

El segmento AB es el camino más corto entre los puntos A y B. La longitud del segmento AB se determina como distancia de los puntos A y B.



A una parte de la recta que empieza del punto A y se extiende infinitamente pasando por el punto B se le llama **rayo AB**, y se simboliza como  $\overrightarrow{AB}$ .

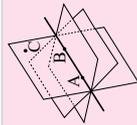
Trace una recta, segmento o rayo, según sea requerido en cada inciso.

- E<sup>1</sup>**
- $\overleftrightarrow{AB}$      $\overrightarrow{A}$      $\overrightarrow{B}$
  - $\overline{CD}$      $\overrightarrow{C}$      $\overrightarrow{D}$
  - $\overrightarrow{ST}$      $\overrightarrow{S}$      $\overrightarrow{T}$

**P<sup>2</sup>** ¿Cuántos puntos como mínimo se necesitan para formar un plano?

**S<sup>2</sup>** Para formar un plano se necesitan tres puntos no alineados en una misma recta.

**C<sup>2</sup>** Un plano se forma con tres puntos no alineados en una misma recta.



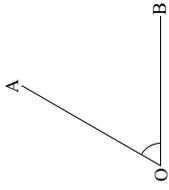
**E<sup>2</sup>** ¿En qué inciso se forma un plano con los puntos dados?

- E<sup>2</sup>**
- $\overrightarrow{A}$      $\overrightarrow{B}$
  - $\overrightarrow{A}$      $\overrightarrow{B}$      $\overrightarrow{C}$
  - $\overrightarrow{A}$      $\overrightarrow{B}$      $\overrightarrow{C}$

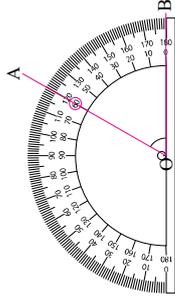
## Sección 1 Elementos básicos de línea y ángulo

### Clase 2 Medida de ángulos

**P** Mida el ángulo de la siguiente figura con un transportador.



Un ángulo es la abertura formada por dos rayos que son llamados lados. Los lados tienen el mismo punto de origen que se llama vértice del ángulo. Se puede medir ángulos con el transportador. El ángulo medido se representa con el signo "°" (grado).



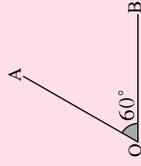
Respuesta: mide  $60^\circ$ .

En un transportador hay dos graduaciones: una que inicia desde la derecha y otra que inicia desde la izquierda. En este caso, lea el número que inicia de la derecha con  $0^\circ$ , que coincida con el lado OB.

**G** Al ángulo que está a la derecha se le llama ángulo AOB y se simboliza como  $\angle AOB$ .

La medida del ángulo AOB también se expresa  $\angle AOB = 60^\circ$ .

Si el  $\angle AOB$  mide  $60^\circ$ , se expresa  $\angle AOB = 60^\circ$ .



Ejemplo:



En este caso, lea el número que inicia de la izquierda con  $0^\circ$ , que coincida con el lado OB.

$\angle AOB = 45^\circ$

**E** Mida el ángulo de las siguientes figuras con un transportador y expréselo utilizando el signo "°".

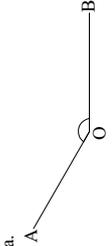
- E**
- - 
  - 
  -

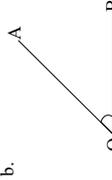
## Sección 1 Elementos básicos de línea y ángulo

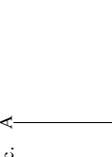
### Clase 3 Ángulos y su clasificación

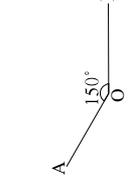
Mida los ángulos indicados con un transportador y ordene de menor a mayor.

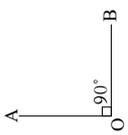
**P**

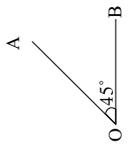
a. 

b. 

c. 

a. 

b. 

c. 

$\angle AOB = 45^\circ$

$\angle AOB = 90^\circ$

$\angle AOB = 150^\circ$

**C**

A un ángulo mayor que  $0^\circ$  y menor que  $90^\circ$  se le llama **ángulo agudo**.

A un ángulo mayor que  $90^\circ$  y menor que  $180^\circ$  se le llama **ángulo obtuso**.

A un ángulo de  $90^\circ$  se le llama **ángulo recto**.

Este símbolo expresa ángulo recto.

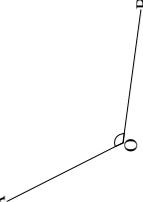
La mitad de un círculo mide  $180^\circ$ . A un ángulo de  $180^\circ$  se le llama **ángulo llano**.

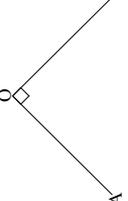
Un círculo mide  $360^\circ$ . A un ángulo de  $360^\circ$  se le llama **ángulo completo**.

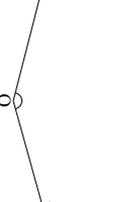
Mida los siguientes ángulos con un transportador e identifique cuáles son ángulos agudos, rectos u obtusos.

**E**

a. 

b. 

c. 

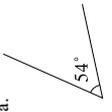
d. 

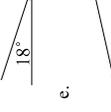
## Sección 2 Ángulos y bisectriz

### Clase 1 Ángulos complementarios y suplementarios

Encuentre parejas de ángulos cuya suma sea  $90^\circ$ .

**P**

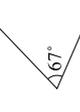
a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

f. 

El ángulo  $a$  se expresa como  $4a$ .

$4a$  también expresa la medida del ángulo  $a$ .  
"La medida del ángulo  $a$  es de  $30^\circ$  se expresa como  $4a = 30^\circ$ ."

**S**

Si  $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ , entonces la suma de los ángulos del inciso a y e es  $90^\circ$ .  
 $18^\circ + 72^\circ = 90^\circ$ , entonces la suma de los ángulos del inciso b y c es  $90^\circ$ .  
 $23^\circ + 67^\circ = 90^\circ$ , entonces la suma de los ángulos del inciso d y f es  $90^\circ$ .

**C**

Si la suma de un  $\angle a$  y  $\angle b$  es  $90^\circ$ , al  $\angle a$  se le llama **ángulo complementario** del  $\angle b$  y al  $\angle b$  se le llama **ángulo complementario** del  $\angle a$ .

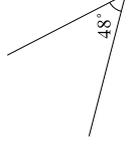
$\angle a + \angle b = 90^\circ$



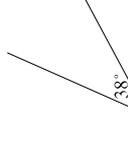
## Unidad 5 Geometría

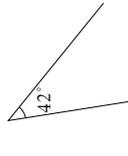
1. Encuentre parejas de ángulos que sean complementarios.

**E**

a. 

b. 

c. 

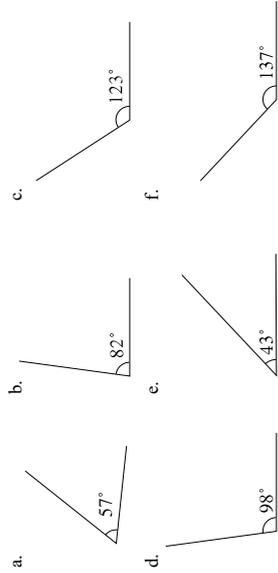
d. 

2. a.  $\angle A$  es el ángulo complementario del  $\angle B$  y  $\angle B = 27^\circ$ . Encuentre la medida del  $\angle A$ .  
 b.  $\angle D$  es el ángulo complementario del  $\angle C$  y  $\angle D = 38^\circ$ . Encuentre la medida del  $\angle C$ .

## Sección 2 Ángulos y bisectriz

### Clase 2 Bisectriz de un ángulo

Encuentre parejas de ángulos cuya suma sea  $180^\circ$ .



**P2**

- $57^\circ + 123^\circ = 180^\circ$ , entonces la suma de los ángulos del inciso a y c es  $180^\circ$ .  
 $82^\circ + 98^\circ = 180^\circ$ , entonces la suma de los ángulos del inciso b y d es  $180^\circ$ .  
 $43^\circ + 137^\circ = 180^\circ$ , entonces la suma de los ángulos del inciso e y f es  $180^\circ$ .

**S2**

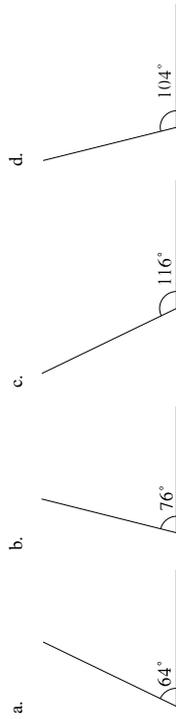
Si la suma de un  $\angle a$  y  $\angle b$  es  $180^\circ$ , al  $\angle a$  se le llama **ángulo suplementario** del  $\angle b$  y al  $\angle b$  se le llama **ángulo suplementario** del  $\angle a$ .

**C2**

$$\angle a + \angle b = 180^\circ$$

- Encuentre parejas de ángulos que sean suplementarios.

**E2**



- $\angle A$  es el ángulo suplementario del  $\angle B$  y  $\angle B = 36^\circ$ . Encuentre la medida del  $\angle A$ .
  - $\angle D$  es el ángulo suplementario del  $\angle C$  y  $\angle D = 71^\circ$ . Encuentre la medida del  $\angle C$ .

**P** Observe los dos ángulos separados por el  $\overline{OP}$  y  $\overline{OQ}$  en la figura 1 y 2.  
 ¿Qué relación hay entre la medida de los dos ángulos de la figura 1 y los otros dos ángulos de la figura 2?

Figura 1

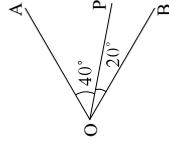


Figura 2

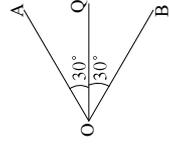


Figura 1:

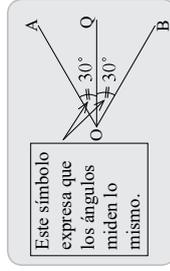
$\angle AOP = 40^\circ$  y  $\angle BOP = 20^\circ$   
 Por tanto, la medida de los dos ángulos separados por el  $\overline{OP}$  es diferente.

**S**

Figura 2:

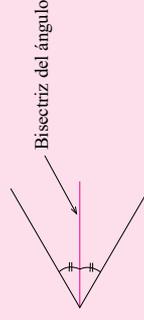
$\angle AOQ = 30^\circ$  y  $\angle BOQ = 30^\circ$   
 Por tanto, la medida de los dos ángulos separados por el  $\overline{OQ}$  es igual.

**C**



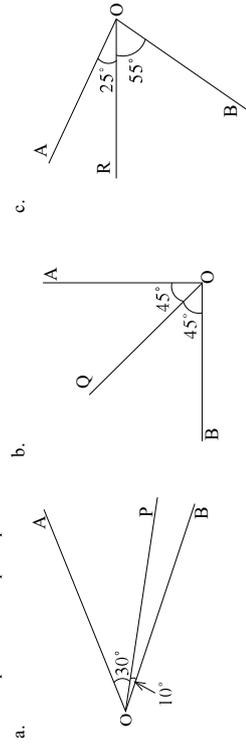
**C**

Al rayo que divide un ángulo en dos partes iguales se le llama **bisectriz** del ángulo.



**E**

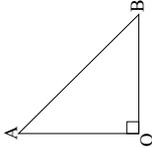
Identifique el inciso que representa la bisectriz del  $\angle AOB$ .



Sección 3 Propiedades y trazo de rectas paralelas, perpendiculares y mediatriz

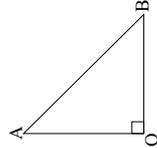
Clase 1 Líneas paralelas y perpendiculares

**C** Si  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  se intersecan formando un ángulo de  $90^\circ$ , se comprende que las dos rectas son **perpendiculares** y se simboliza como  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ .



$\overline{AB}$  se lee recta  $\overline{AB}$ .

Ejemplo:

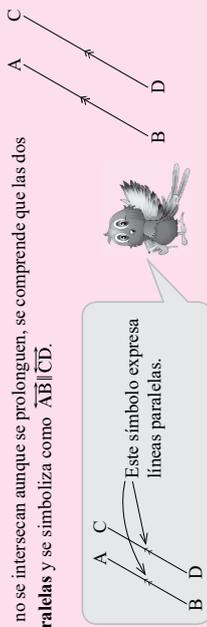


En la figura dada, el ángulo formado por el  $\overline{AO}$  y el  $\overline{BO}$  es de  $90^\circ$ .  
Por tanto,  $\overline{AO} \perp \overline{BO}$ .

Los segmentos también forman perpendiculares.

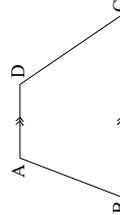


**C** Si  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  no se intersecan aunque se prolonguen, se comprende que las dos rectas son **paralelas** y se simboliza como  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ .



Este símbolo expresa líneas paralelas.

Ejemplo:



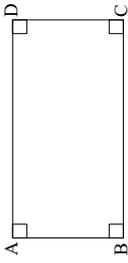
En la figura dada, el  $\overline{AD}$  y el  $\overline{BC}$  son paralelos.  
Por tanto,  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .

Los segmentos también forman paralelas.



**E** Simbolice las relaciones que existen entre los segmentos indicados del siguiente rectángulo con el signo “ $\perp$ ” o “ $\parallel$ ”.

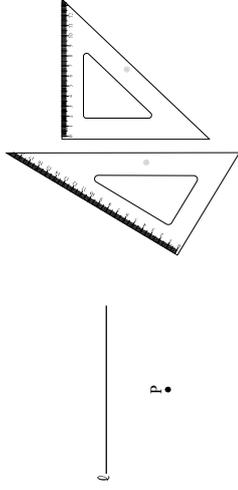
a.  $\overline{AB}$  y  $\overline{DC}$   
b.  $\overline{AB}$  y  $\overline{AD}$   
c.  $\overline{BC}$  y  $\overline{AD}$   
d.  $\overline{DC}$  y  $\overline{BC}$



Sección 3 Propiedades y trazo de rectas paralelas, perpendiculares y mediatriz

Clase 2 Construcción de líneas paralelas

**P** ¿Con qué pasos se traza una recta que es paralela a la recta  $\ell$  y pasa por el punto P utilizando escuadras?



Se puede expresar una recta con una letra como  $\ell$  o  $m$ .



Para trazar líneas paralelas con ángulo recto:

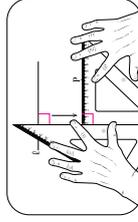
**S**



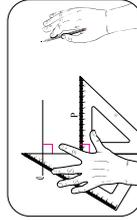
Paso 1. Alinee uno de los lados de la escuadra con la línea recta  $\ell$  como se indica en la figura.



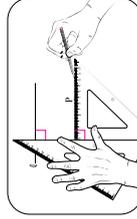
Paso 2. Sujete firme la escuadra, y coloque la otra escuadra a lo largo del otro lado del ángulo recto.



Paso 3. Deslice la escuadra hasta llegar al punto P.



Paso 4. Mientras sostiene el par de escuadras, tome un lápiz.

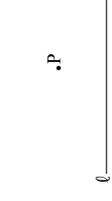


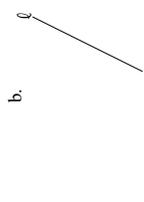
Paso 5. Mientras sostiene firmemente las escuadras, trace la línea recta que pasa a través del punto P.

Unidad 5 Geometría

Trace con escuadras una línea recta paralela a la recta  $\ell$  que pase por el punto P.

**E**

a. 

b. 

Sección 3 Propiedades y trazo de rectas paralelas, perpendiculares y mediatriz

Clase 3 Mediatriz de un segmento



Dados los puntos A y B, trace un segmento  $\overline{AB}$ . Luego, doble exactamente por la mitad juntando ambos puntos, y trace una recta en el doblez.

a. Mida los ángulos que forman el  $\overline{AB}$  y la recta sobre el doblez. ¿Qué característica tienen los ángulos?

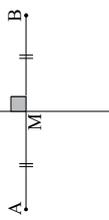


b. Nombre la intersección del  $\overline{AB}$  y la recta sobre el doblez como M. Mida la longitud del  $\overline{MA}$  y  $\overline{MB}$  y represente la relación entre ellos con una expresión matemática.



a. El segmento  $\overline{AB}$  y la recta sobre el doblez forman ángulos de  $90^\circ$ .

b. La longitud de  $\overline{MA}$  y  $\overline{MB}$  es igual.

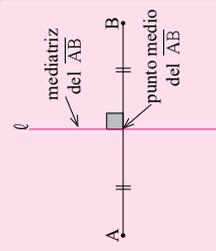


Este símbolo expresa que los dos segmentos tienen la misma longitud.



Al punto que divide un segmento en dos partes iguales se le llama **punto medio**.

A una recta  $\ell$  que se interseca perpendicularmente con el punto medio del  $\overline{AB}$  se le llama **mediatriz** del  $\overline{AB}$ .

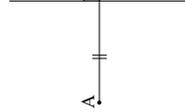


Identifique el inciso que representa la mediatriz del  $\overline{AB}$ .

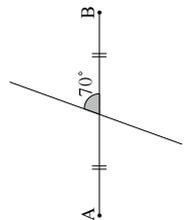
a.



b.



c.



Sección 3 Propiedades y trazo de rectas paralelas, perpendiculares y mediatriz

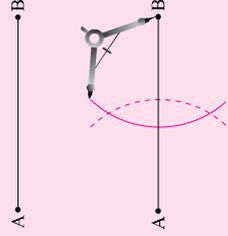
Clase 4 Construcción de mediatriz de un segmento



Para construir la mediatriz del  $\overline{AB}$  con regla y compás:

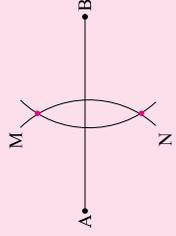
Paso 1.

Trace un arco con centro en A. Luego, trace un arco con el mismo radio con centro en B.



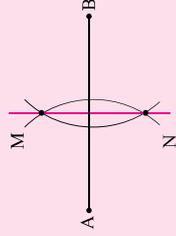
Paso 2.

Identifique las intersecciones de los dos arcos con M y N.



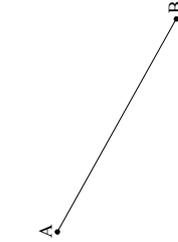
Paso 3.

Trace una recta que pase por los puntos M y N.



Trace la mediatriz del  $\overline{AB}$  con regla y compás en las siguientes figuras.

a.



b.



## Sección 4 Ángulos y líneas paralelas

### Clase 1 Ángulos opuestos por el vértice

Si el  $\angle a = 130^\circ$ :

- a. ¿Cuánto miden los otros ángulos de la figura?  
 b. ¿Dónde se encuentran los ángulos con la misma medida?

a. Para el  $\angle b$ :

$$\begin{aligned}\angle a + \angle b &= 180^\circ \\ 130^\circ + \angle b &= 180^\circ \\ 130^\circ - 130^\circ + \angle b &= 180^\circ - 130^\circ \\ \angle b &= 50^\circ\end{aligned}$$

Para el  $\angle d$ :

$$\begin{aligned}\angle a + \angle d &= 180^\circ \\ 130^\circ + \angle d &= 180^\circ \\ 130^\circ - 130^\circ + \angle d &= 180^\circ - 130^\circ \\ \angle d &= 50^\circ\end{aligned}$$

Respuesta:  $\angle b = 50^\circ$ ,  $\angle d = 50^\circ$  y  $\angle c = 130^\circ$ .

- b.  $\angle a = 130^\circ$ ,  $\angle c = 130^\circ$   
 Por tanto,  $\angle a = \angle c$ .

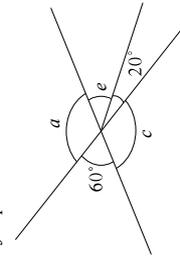
$$\begin{aligned}\angle b = 50^\circ, \angle d = 50^\circ \\ \text{Por tanto, } \angle b = \angle d.\end{aligned}$$

Respuesta: los ángulos poseen una misma medida cuando los lados de uno son rayos opuestos a los lados del otro ángulo.

Dos ángulos son llamados **ángulos opuestos por el vértice**, cuando los lados de uno son rayos opuestos a los lados del otro ángulo.

En la figura de la derecha, el  $\angle a$  y el  $\angle c$  son ángulos opuestos por el vértice, así como el  $\angle b$  y el  $\angle d$ . Dos ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

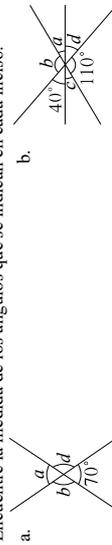
Ejemplo:



$$\begin{aligned}\angle a + 60^\circ &= 180^\circ \\ \angle a + 60^\circ - 60^\circ &= 180^\circ - 60^\circ \\ \angle a &= 120^\circ \\ \angle a &= \angle c \text{ (por ser ángulos opuestos por el vértice)} \\ \angle c &= 120^\circ \\ \angle e + 20^\circ &= 60^\circ \text{ (por ser ángulos opuestos por el vértice)} \\ \angle e + 20^\circ - 20^\circ &= 60^\circ - 20^\circ \\ \angle e &= 40^\circ\end{aligned}$$

Respuesta:  $\angle a = 120^\circ$ ,  $\angle c = 120^\circ$  y  $\angle e = 40^\circ$ .

a. Encuentre la medida de los ángulos que se indican en cada inciso.



b.

## Sección 4 Ángulos y líneas paralelas

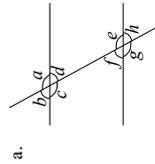
### Clase 2 Ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos

**C1**

Cuando una recta  $n$  se interseca con las rectas  $\ell$  y  $m$  como en la figura que está a la derecha, al  $\angle a$  y al  $\angle e$  se les llama **ángulos correspondientes**.

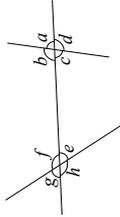
$\angle b$  y  $\angle f$ ,  $\angle c$  y  $\angle g$ ,  $\angle d$  y  $\angle h$  son también ángulos correspondientes.

Identifique todos los pares de ángulos correspondientes en las siguientes figuras.



a.

b.

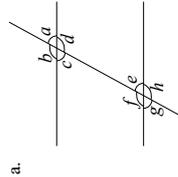


**C2**

Cuando una recta  $n$  se interseca con las rectas  $\ell$  y  $m$  como en la figura de la derecha, al  $\angle c$  y al  $\angle e$  se les llama **ángulos alternos internos**.

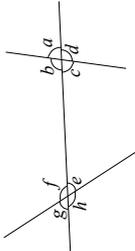
$\angle d$  y  $\angle f$  son también ángulos alternos internos.

Identifique todos los pares de ángulos alternos internos en las siguientes figuras.



a.

b.

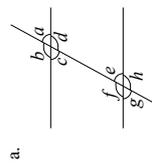


**C3**

Cuando una recta  $n$  se interseca con las rectas  $\ell$  y  $m$  como en la figura de la derecha, al  $\angle a$  y al  $\angle g$  se les llama **ángulos alternos externos**.

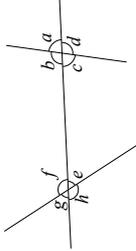
$\angle b$  y  $\angle h$  son también ángulos alternos externos.

Identifique todos los pares de ángulos alternos externos en las siguientes figuras.



a.

b.

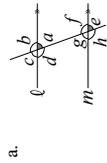
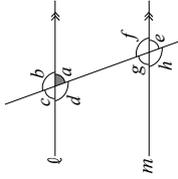


### Sección 4 Ángulos y líneas paralelas

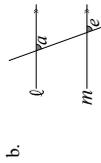
#### Clase 3 Ángulos correspondientes y líneas paralelas

Si  $\ell$  y  $m$  son rectas paralelas:

- Identifique el ángulo correspondiente al  $4a$ .
- Mida el  $4a$  y su ángulo correspondiente con un transportador y compare la medida de los ángulos correspondientes.



Respuesta: el ángulo correspondiente al  $4a$  es el  $4e$ .



- $4a = 70^\circ$   
 $4e = 70^\circ$   
 Entonces, la medida del  $4a$  y  $4e$  es igual.  
 $4a = 4e$

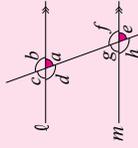


Si una recta se interseca con dos rectas paralelas, entonces la medida de los ángulos correspondientes es igual.

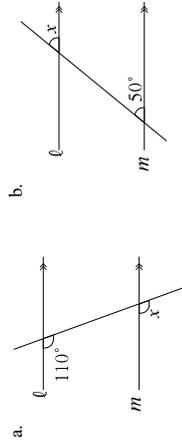
Si  $\ell \parallel m$ , entonces  $4a = 4e$ .

Recíprocamente, si la medida de los ángulos correspondientes  $a$  y  $e$  es igual, entonces las rectas  $\ell$  y  $m$  son paralelas.

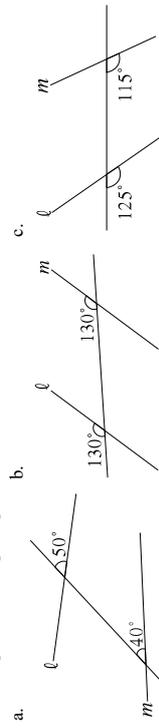
Si  $4a = 4e$ , entonces  $\ell \parallel m$ .



- Dado  $\ell \parallel m$ , encuentre la medida de  $4x$ .



- Identifique el inciso que representa  $\ell \parallel m$ .

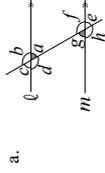
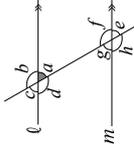


### Sección 4 Ángulos y líneas paralelas

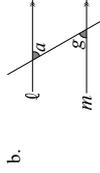
#### Clase 4 Ángulos alternos y líneas paralelas

Si  $\ell$  y  $m$  son rectas paralelas:

- Identifique el ángulo alterno interno del  $4a$ .
- Mida el  $4a$  y su ángulo alterno interno con un transportador y compare sus medidas.



Respuesta: el ángulo alterno interno del  $4a$  es el  $4g$ .



- $4a = 60^\circ$   
 $4g = 60^\circ$   
 Entonces, la medida del  $4a$  y del  $4g$  es igual.  
 $4a = 4g$

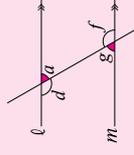


Si una recta se interseca con dos rectas paralelas, entonces la medida de los ángulos alternos internos es igual.

Si  $\ell \parallel m$ , entonces  $4a = 4g$ .

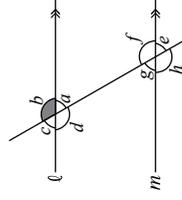
Recíprocamente, si la medida de los ángulos alternos internos  $a$  y  $g$  es igual, entonces las dos rectas  $\ell$  y  $m$  son paralelas.

Si  $4a = 4g$ , entonces  $\ell \parallel m$ .



Si  $\ell$  y  $m$  son rectas paralelas:

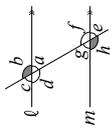
- Identifique el ángulo alterno externo del  $4b$ .
- Mida el  $4b$  y su ángulo alterno externo y compare la medida de los ángulos alternos externos.



## Sección 5 Polígonos

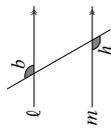
### Clase 1 Figuras abiertas y cerradas

**S**



Respuesta: el ángulo externo del  $\sphericalangle b$  es el  $\sphericalangle h$ .

a.



$$\sphericalangle b = 120^\circ$$

$$\sphericalangle h = 120^\circ$$

Entonces, la medida del  $\sphericalangle b$  y del  $\sphericalangle h$  es igual.  
 $\sphericalangle b = \sphericalangle h$

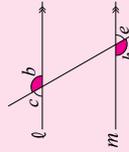
**C**

Si una recta se interseca con dos rectas paralelas, entonces la medida de los ángulos alternos externos es igual.

$$\text{Si } \ell \parallel m, \text{ entonces } \sphericalangle b = \sphericalangle h.$$

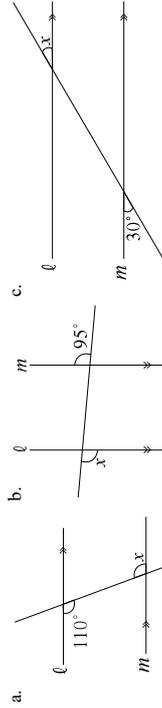
Recíprocamente, si la medida de los ángulos alternos externos  $b$  y  $h$  es igual, entonces las rectas  $\ell$  y  $m$  son paralelas.

$$\text{Si } \sphericalangle b = \sphericalangle h, \text{ entonces } \ell \parallel m.$$

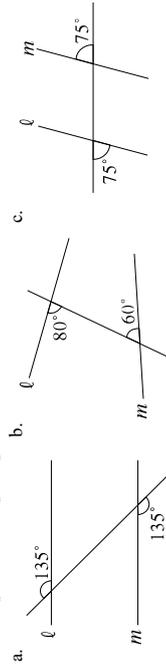


**E**

1. Dado  $\ell \parallel m$ , encuentre la medida de  $\sphericalangle x$ .



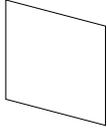
2. Identifique el inciso que representa  $\ell \parallel m$ .



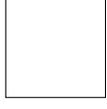
**P**

Clasifique las siguientes figuras en dos grupos e identifique las características de cada grupo.

a.



b.



c.



d.

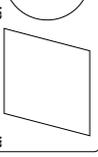


**S**

Grupo A: a y d

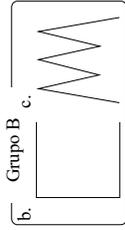
Grupo B: b y c

Grupo A



El grupo A consiste en figuras planas rodeadas con líneas o segmentos.

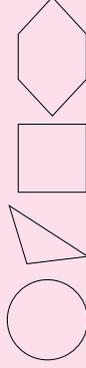
Grupo B



El grupo B consiste en figuras planas no rodeadas con líneas o segmentos.

**C**

A una figura plana rodeada con líneas o segmentos consecutivos, como los siguientes ejemplos, se le llama **figura cerrada**.



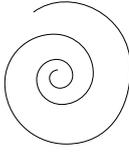
A una figura plana no rodeada con líneas o segmentos consecutivos, como los siguientes ejemplos, se le llama **figura abierta**.



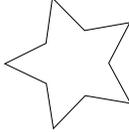
**E**

1. Clasifique las siguientes figuras según sean cerradas o abiertas.

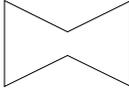
a.



b.



c.



2. Dibuja un ejemplo diferente de las figuras de esta página.

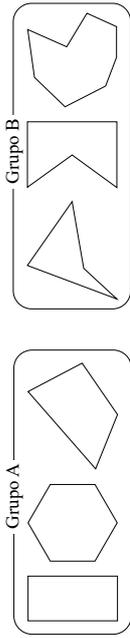
a. Figura cerrada

b. Figura abierta

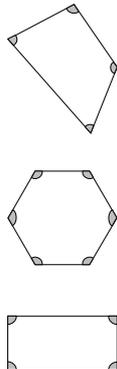
## Sección 5 Polígonos

### Clase 2 Figuras convexas y cóncavas

Identifique las características de los ángulos de los grupos A y B.



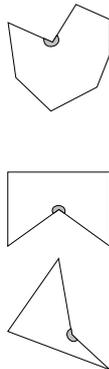
En el grupo A, todos los ángulos internos son menores que  $180^\circ$ .



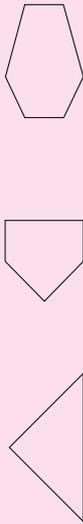
A los ángulos formados dentro de un polígono se les llama **ángulos internos**.



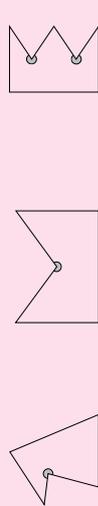
En el grupo B, existe un ángulo interno mayor que  $180^\circ$ .



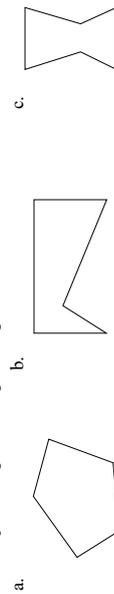
A una figura con todos los ángulos internos menores que  $180^\circ$ , como los siguientes ejemplos, se le llama **figura convexa**.



A una figura con al menos un ángulo interno mayor que  $180^\circ$ , como los siguientes ejemplos, se le llama **figura cóncava**.



1. Clasifique las siguientes figuras según sean convexas o cóncavas.

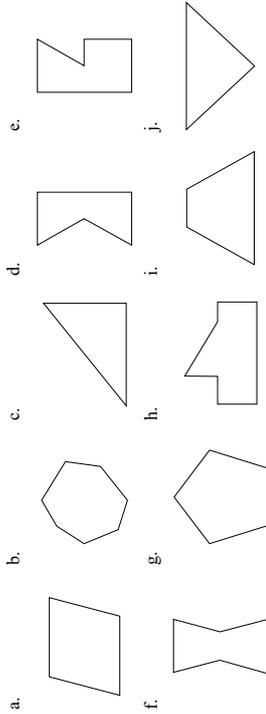


2. Dibuje un ejemplo diferente de las figuras de esta página.  
a. Figura convexa  
b. Figura cóncava

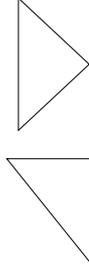
## Sección 5 Polígonos

### Clase 3 Polígonos

Clasifique los siguientes polígonos en cinco grupos, identificando el número de lados.



Grupo 1: los polígonos que tienen tres lados.



Grupo 2: los polígonos que tienen cuatro lados.



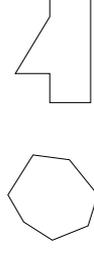
Grupo 3: los polígonos que tienen cinco lados.



Grupo 4: los polígonos que tienen seis lados.



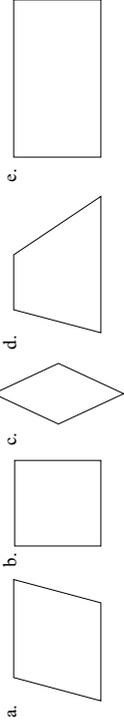
Grupo 5: los polígonos que tienen siete lados.



## Sección 6 Cuadriláteros

### Clase 1 Clasificación de cuadriláteros

Complete la tabla con el inciso y el nombre que corresponde a la definición de cada cuadrilátero. Solo puede utilizar una vez cada inciso.



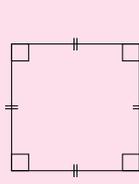
Inciso				
Nombre				
Definiciones	Posee cuatro lados de la misma longitud y cuatro ángulos de $90^\circ$ .	Posee cuatro ángulos de $90^\circ$ .	Posee cuatro lados de la misma longitud.	Posee dos pares de lados opuestos paralelos.
				Posee un par de lados opuestos paralelos.

**S**

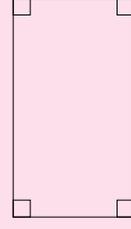
Inciso	b.	c.	a.	d.
Nombre	Cuadrado	Rectángulo	Paralelogramo	Trapezoido
Definiciones	Posee cuatro lados de la misma longitud y cuatro ángulos de $90^\circ$ .	Posee cuatro ángulos de $90^\circ$ .	Posee dos pares de lados opuestos paralelos.	Posee un par de lados opuestos paralelos.

**G**

**Cuadrado:**  
Es un cuadrilátero con cuatro lados de la misma longitud y cuatro ángulos rectos ( $90^\circ$ ).



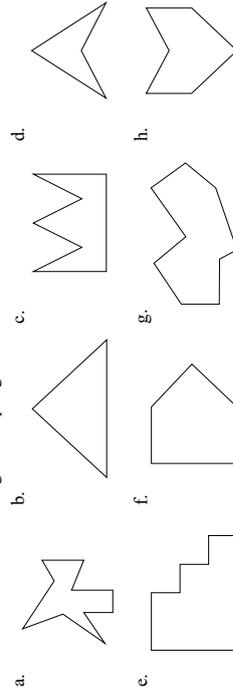
**Rectángulo:**  
Es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos ( $90^\circ$ ).



**G**

Número de lados	Nombre del polígono	Ejemplo del polígono
3	Triángulo	
4	Cuadrilátero	
5	Pentágono	
6	Hexágono	
7	Heptágono	
8	Octágono	
9	Eneágono	
10	Decágono	

1. Escriba el nombre de los siguientes polígonos.



2. Dibuje los siguientes polígonos, utilizando regla.

a. Triángulo

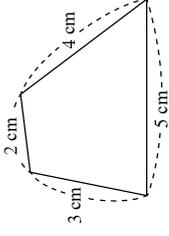
b. Pentágono

c. Heptágono

## Sección 6 Cuadriláteros Clase 2 Perímetro de cuadriláteros

**P**

Encuentre el perímetro del siguiente cuadrilátero.



El perímetro es la suma de la longitud de todos los lados.

**S**

$$3 + 2 + 4 + 5 = 14$$

Respuesta: 14 cm

**C**

A la suma de la longitud de todos los lados de una figura plana se le llama **perímetro**. El perímetro de un cuadrilátero es la suma de la longitud de sus cuatro lados.

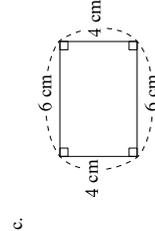
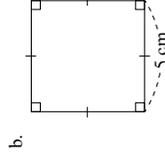
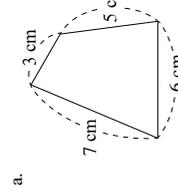
$$P = a + b + c + d$$

donde  $P$  es el perímetro.

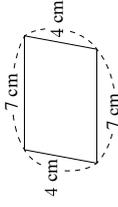


**E**

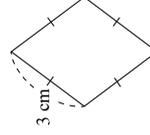
Encuentre el perímetro de los siguientes cuadriláteros.



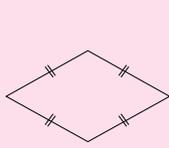
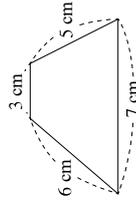
d.



e.



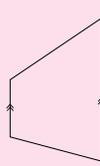
f.



**Rombo:**  
Es un cuadrilátero con cuatro lados de la misma longitud.



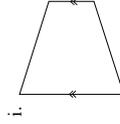
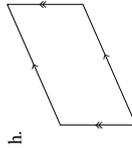
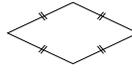
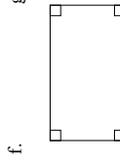
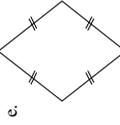
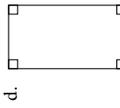
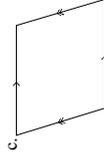
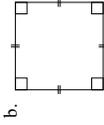
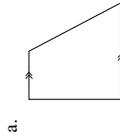
**Paralelogramo:**  
Es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos.



**Trapezio:**  
Es un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos.

**E**

Escriba el nombre de los siguientes cuadriláteros.

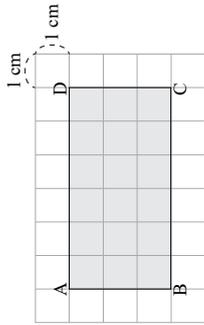


## Sección 6 Cuadriláteros

### Clase 3 Área de rectángulos y cuadrados

**P<sub>1</sub>**

¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área del rectángulo ABCD?

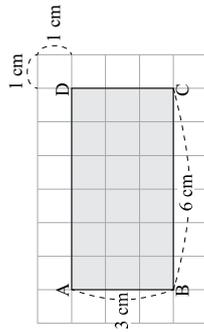


**S<sub>1</sub>**

Área del rectángulo ABCD = número de cuadrillos de  $1 \text{ cm}^2$  que posee el rectángulo ABCD.  
Por tanto:  
cuadrillos del lado horizontal  $\times$  cuadrillos del lado vertical = todos los cuadrillos

$$6 \times 3 = 18$$

longitud horizontal (base)  $\times$  longitud vertical (altura) = medida del área



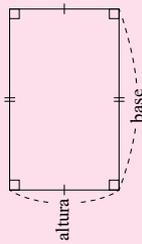
Es más sencillo realizar un cálculo que contar uno a uno todos los cuadrillos de  $1 \text{ cm}^2$ .



Respuesta:  $18 \text{ cm}^2$

**C<sub>1</sub>**

Área de un rectángulo = base  $\times$  altura

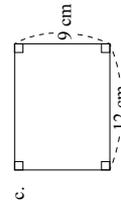
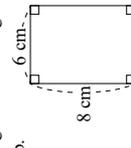
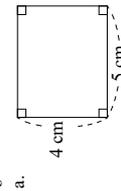


Se puede calcular el área de un rectángulo si se sabe la base (longitud horizontal) y la altura (longitud vertical).



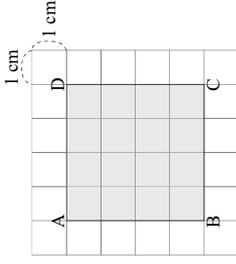
**E<sub>1</sub>**

¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área de los siguientes rectángulos?



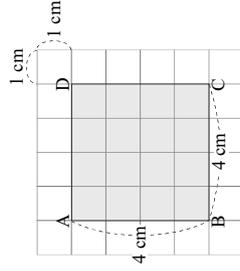
**P<sub>2</sub>**

¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área del cuadrado ABCD?



**S<sub>2</sub>**

(Área del cuadrado ABCD)  
= (longitud horizontal)  $\times$  (longitud vertical)  
=  $4 \times 4$   
= 16



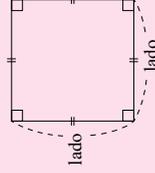
Se puede calcular el área de un cuadrado si se sabe la longitud de uno de sus lados, porque la longitud vertical y la horizontal son iguales.



Respuesta:  $16 \text{ cm}^2$

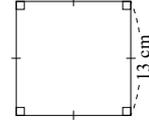
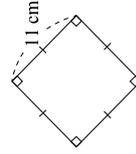
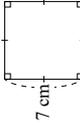
**C<sub>2</sub>**

Área de un cuadrado = lado  $\times$  lado



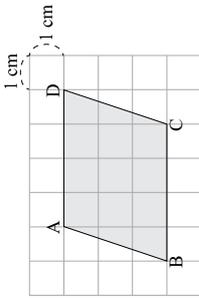
**E<sub>2</sub>**

¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área de los siguientes cuadrados?



**Sección 6 Cuadriláteros**  
**Clase 4 Área de paralelogramos**

¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área del paralelogramo ABCD?

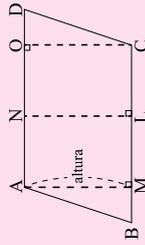


Para calcular el área de un paralelogramo, piense en el paralelogramo ABCD, transformado en el rectángulo OBCP.

$$\begin{aligned} & (\text{Área del paralelogramo ABCD}) \\ &= (\text{área del rectángulo OBCP}) \\ &= (\text{base}) \times (\text{altura}) \\ &= 4 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

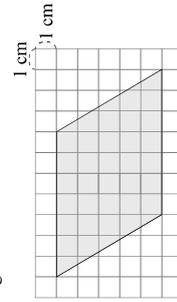
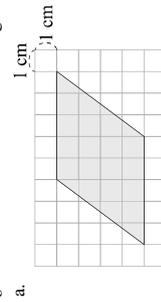
Respuesta:  $12 \text{ cm}^2$

Para calcular el área de un paralelogramo, se considera el lado BC como base y el segmento perpendicular a esa base AM, como su altura. Los segmentos NL y OC también se consideran como altura. Área de un paralelogramo = base  $\times$  altura

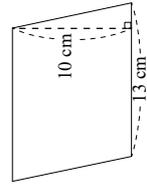
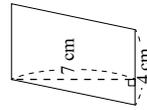


En un paralelogramo se puede considerar la base como la longitud horizontal y la altura como la longitud vertical del rectángulo.

1. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área de los siguientes paralelogramos?

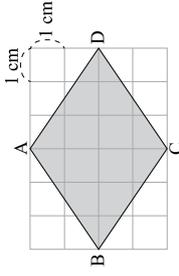


2. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área de los siguientes paralelogramos?



**Sección 6 Cuadriláteros**  
**Clase 5 Área de rombos**

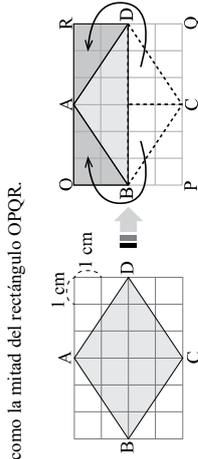
¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área del rombo ABCD?



El rombo ABCD se puede considerar como la mitad del rectángulo OPQR.

$$\begin{aligned} & (\text{Área del rombo ABCD}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{área del rectángulo OPQR}) \\ &= \frac{1}{2} \times (6 \times 4) \\ &= 12 \end{aligned}$$

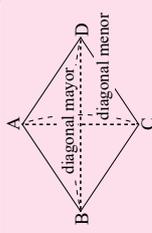
Respuesta:  $12 \text{ cm}^2$



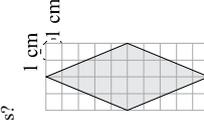
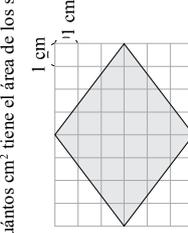
En el rombo ABCD, a la diagonal BD que es la más larga se le llama **diagonal mayor** y a la diagonal AC que es la más corta se le llama **diagonal menor**.

$$\text{Área de un rombo} = \frac{1}{2} \times \text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}$$

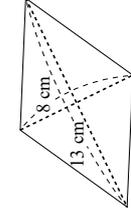
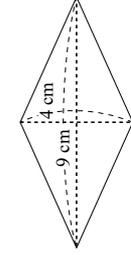
En un rombo, las diagonales se pueden considerar como la base y la altura del rectángulo.



1. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área de los siguientes rombos?



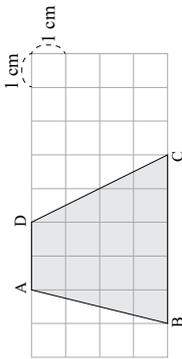
2. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área de los siguientes rombos?



## Sección 6 Cuadriláteros

### Clase 6 Área de trapecios

**P** ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área del trapecio ABCD?



**S** El trapecio ABCD se puede considerar como la mitad del paralelogramo ABOR.

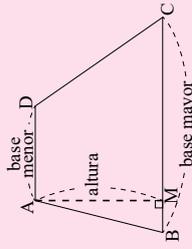
$$\begin{aligned} & (\text{Área del trapecio ABCD}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{área del paralelogramo ABOR}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{base BO} \times \text{altura}) \\ &= \frac{1}{2} \times [(5 + 2) \times 4] \\ &= 14 \end{aligned}$$

Respuesta:  $14 \text{ cm}^2$

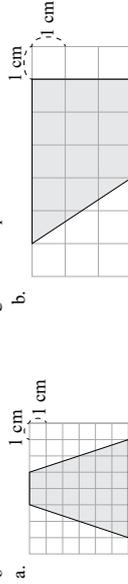
**G** En el trapecio ABCD, a los dos lados paralelos BC y AD, se les llama **base mayor** y **base menor**, respectivamente. La longitud del segmento perpendicular AM intersectado con la base mayor BC y la menor AD se considera como la altura.

$$\text{Área de un trapecio} = \frac{1}{2} \times (\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}$$

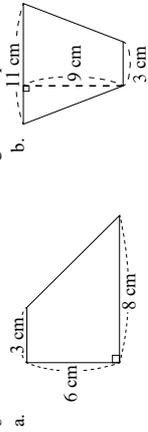
En un trapecio se puede considerar "base mayor + base menor" como la base del paralelogramo.



**E** 1. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área de los siguientes trapecios?



2. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área de los siguientes trapecios?



## Sección 7 Triángulos

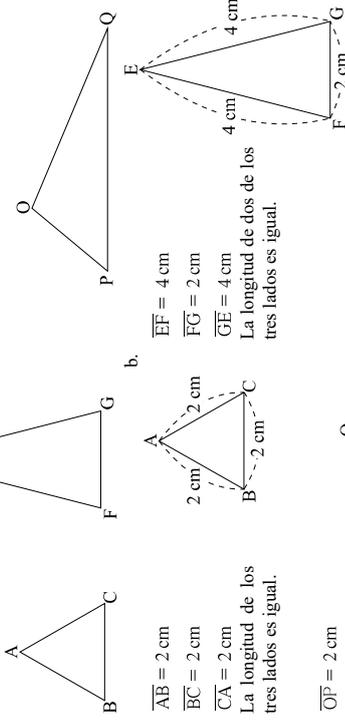
### Clase 1 Clasificación de triángulos por sus lados

**P** Mida la longitud de cada lado de los triángulos que están abajo con una regla y anote.

a.  $\overline{AB} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$   $\overline{BC} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$   $\overline{CA} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$

b.  $\overline{EF} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$   $\overline{FG} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$   $\overline{GE} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$

c.  $\overline{OP} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$   $\overline{PQ} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$   $\overline{QO} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$



**S**

a.  $\overline{AB} = 2 \text{ cm}$   $\overline{BC} = 2 \text{ cm}$   $\overline{CA} = 2 \text{ cm}$   
La longitud de los tres lados es igual.

b.  $\overline{EF} = 4 \text{ cm}$   $\overline{FG} = 2 \text{ cm}$   $\overline{GE} = 4 \text{ cm}$   
La longitud de dos de los tres lados es igual.

c.

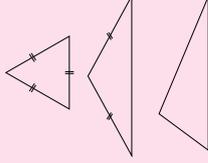
$\overline{OP} = 2 \text{ cm}$   $\overline{PQ} = 5 \text{ cm}$   $\overline{QO} = 4 \text{ cm}$   
La longitud de los tres lados es diferente.

**G**

A un triángulo que posee la misma longitud en sus tres lados se le llama **triángulo equilátero**.

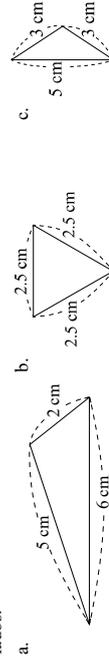
A un triángulo que posee dos lados con igual longitud se le llama **triángulo isósceles**.

A un triángulo que posee diferente longitud en sus tres lados se le llama **triángulo escaleno**.

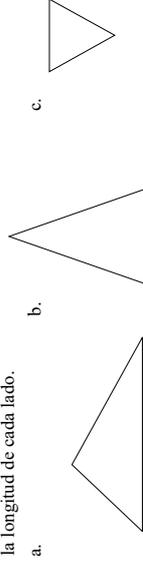


**E**

1. Clasifique los siguientes triángulos en equilátero, isósceles o escaleno, según la medida de sus lados.



2. Clasifique los siguientes triángulos en equilátero, isósceles o escaleno. Utilice regla para medir la longitud de cada lado.



## Sección 7 Triángulos

### Clase 2 Clasificación de triángulos por sus ángulos

Mida y anote la medida de cada ángulo de los tres triángulos indicados.



En la figura que está a la izquierda, se expresa el ángulo como  $\angle A$ . La medida del  $\angle A$  se expresa  $\angle A = 45^\circ$ .

a.  $\angle A = \text{ }^\circ$   
 $\angle B = \text{ }^\circ$   
 $\angle C = \text{ }^\circ$

b.  $\angle E = \text{ }^\circ$   
 $\angle F = \text{ }^\circ$   
 $\angle G = \text{ }^\circ$

c.  $\angle O = \text{ }^\circ$   
 $\angle P = \text{ }^\circ$   
 $\angle Q = \text{ }^\circ$



El triángulo ABC se expresa como  $\triangle ABC$ .

- a. Los tres ángulos internos son menores que  $90^\circ$ .  
 b. Uno de los tres ángulos internos es de  $90^\circ$ .  
 c. Uno de los tres ángulos internos es mayor que  $90^\circ$ .



A un triángulo que posee todos sus ángulos internos menores que  $90^\circ$  se le llama **triángulo acutángulo**.

A un triángulo que posee un ángulo interno de  $90^\circ$  se le llama **triángulo rectángulo**.

A un triángulo que posee un ángulo interno mayor que  $90^\circ$  se le llama **triángulo obtusángulo**.

Los triángulos equiláteros son un tipo de triángulos acutángulos.

A un triángulo que posee un ángulo interno mayor que  $90^\circ$  se le llama **triángulo obtusángulo**.



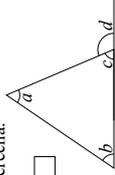
1. Clasifique los siguientes triángulos, según la medida de sus ángulos, en acutángulo, rectángulo u obtusángulo.
- a.   
 b.   
 c.
2. Clasifique los siguientes triángulos en acutángulo, rectángulo u obtusángulo.
- a.   
 b.   
 c.

## Sección 7 Triángulos

### Clase 3 Relación entre los ángulos internos y externos de un triángulo



1. Complete los espacios en blanco con base en el triángulo que está a la derecha.
- a.  $\angle a + \angle b + \angle c = \text{ }^\circ$   
 b. Expresar la suma del  $\angle a$  y el  $\angle b$  usando el  $\angle c$ :  $\angle a + \angle b = \text{ }^\circ$   
 c.  $\angle c + \angle d = \text{ }^\circ$   
 d. Expresar  $\angle d$  usando  $\angle c$ :  $\angle d = \text{ }^\circ$



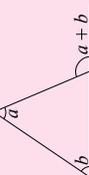
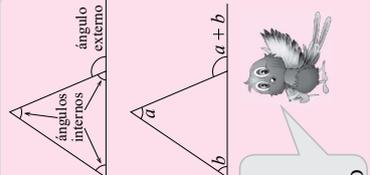
2. Compare las medidas de los ángulos obtenidos en los incisos b y d.
1. a. La suma de los ángulos internos del triángulo es  $180^\circ$ .  
 Por tanto,  $\angle a + \angle b + \angle c = 180^\circ$ .  
 b. Para expresar la suma del  $\angle a$  y el  $\angle b$  usando el  $\angle c$ , de la suma de los ángulos internos del triángulo ( $180^\circ$ ) reste el  $\angle c$ .  
 Por tanto,  $\angle a + \angle b = 180^\circ - \angle c$ .  
 c. Un ángulo llano mide  $180^\circ$ .  
 Por tanto,  $\angle c + \angle d = 180^\circ$ .  
 d. Para expresar el  $\angle d$  usando el  $\angle c$ , reste el  $\angle c$  del ángulo llano ( $180^\circ$ ).  
 $\angle d = 180^\circ - \angle c$ .
2.  $\angle a + \angle b = 180^\circ - \angle c$   
 $\angle d = 180^\circ - \angle c$   
 Por tanto, la suma del  $\angle a$  y el  $\angle b$  es igual al  $\angle d$ .  
 $\angle a + \angle b = \angle d$

La mitad del círculo mide  $180^\circ$ .  
 Al ángulo de  $180^\circ$  se le llama ángulo llano.



A un ángulo formado por un lado de un triángulo y la extensión de su lado adyacente se le llama **ángulo externo**.

A los tres ángulos formados dentro de un triángulo se les llama **ángulos internos**.



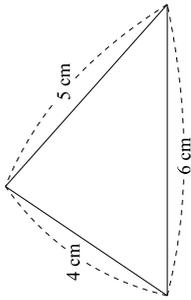
A dos ángulos que tienen un lado y el vértice en común se les llama **ángulos adyacentes**.  $\angle BAC$  y  $\angle CAD$  son ángulos adyacentes. Tienen un lado en común (el rayo AC). Tienen el vértice en común (el punto A).



- Encuentre la medida del  $\angle c$ .
- a.   
 b.

**Sección 7 Triángulos**  
**Clase 4 Perímetro de triángulos**

**P** Suma la longitud de los tres lados del triángulo de la derecha.



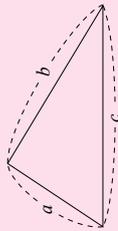
**S**  $4 + 5 + 6 = 15$

Respuesta: la suma de la longitud de los tres lados es 15 cm.

**C** A la suma de la longitud de todos los lados de una figura plana se le llama perímetro. El perímetro de un triángulo es la suma de la longitud de los tres lados.

$$P = a + b + c$$

donde  $P$  es el perímetro.

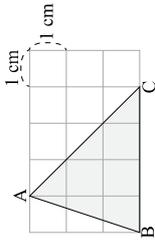


**E** Encuentre el perímetro de los siguientes triángulos.

- a.
- b.
- c.
- d.
- e.
- f.

**Sección 7 Triángulos**  
**Clase 5 Área de triángulos**

**P** ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área del  $\triangle ABC$ ?



(Área del  $\triangle ABC$ )

$$= \frac{1}{2} \times (\text{área del paralelogramo } ABCD)$$

$$= \frac{1}{2} \times (\text{base}) \times (\text{altura})$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3$$

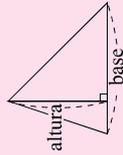
$$= 6$$

Respuesta:  $6 \text{ cm}^2$

Área de un paralelogramo = base  $\times$  altura



Área de un triángulo =  $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$



**E** 1. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área de los siguientes triángulos?

- a.
- b.
- c.
- d.

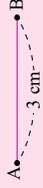
## Sección 8 Propiedades y construcción de polígonos

### Clase 1 Construcción de triángulos equiláteros



Para construir un triángulo equilátero de 3 cm de lado con regla y compás.

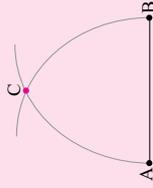
**Paso 1.**  
Trace el segmento AB de 3 cm.



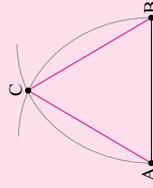
**Paso 2.**  
Trace dos arcos con un radio de 3 cm utilizando los puntos A y B como centro.



**Paso 3.**  
Marque la intersección C entre los dos arcos.



**Paso 4.**  
Trace un segmento que una el punto C con el punto A, y otro que una el punto C con el punto B.



Construya un triángulo equilátero con regla y compás.

- El triángulo equilátero ABC de 2 cm de lado.
- El triángulo equilátero ABC de 5 cm de lado.



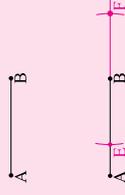
## Sección 8 Propiedades y construcción de polígonos

### Clase 2 Construcción de cuadrados

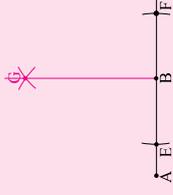


Para construir un cuadrado de 2 cm de lado con regla y compás.

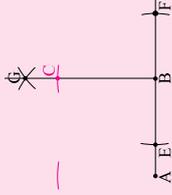
**Paso 1.**  
Extienda el segmento AB a la derecha y coloque el compás en el punto B con cualquier medida menor que 2 cm para trazar un arco en cada lado del punto B, creando los puntos E y F.



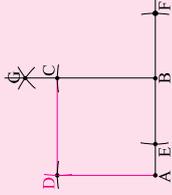
**Paso 2.**  
Coloque el compás en el punto F con cualquier medida que sea conveniente. Trace un arco sobre el punto B. Sin cambiar la medida del compás, colóquelo en el punto E y trace un arco sobre el punto B, cruzando el arco anterior y creando el punto G.



**Paso 3.**  
Coloque el compás en el punto B, establezca la medida hasta el punto A y mantenga esa medida. Trace un arco sobre el rayo BG creando el punto C. Coloque el compás en el punto A y trace un arco encima del punto A, sin cambiar la medida del compás.



**Paso 4.**  
Coloque el compás en el punto C, manteniendo la medida del compás y trace un arco a la izquierda del punto C que atraviese el arco existente, creando el punto D. Trace los segmentos CD y AD.



El cuadrilátero ABCD es un cuadrado cuyo lado es 2 cm.

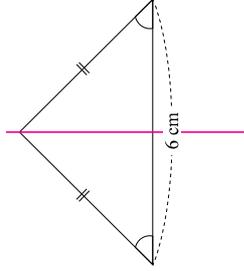
Construya con regla y compás un cuadrado cuyo lado sea 4 cm.



### Sección 9 Simetría

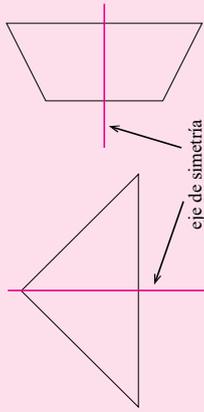
#### Clase 1 Simetría axial

**P** Si se dobla el triángulo isósceles sobreponiendo los dos lados con igual longitud, ¿cómo quedarán ambas partes?

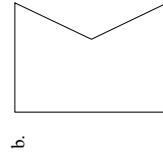


**S** Las dos partes divididas por el doblar se sobreponen exactamente.

**C** A una figura que se divide en dos partes iguales por una línea recta, se le llama **figura con simetría axial**. A esa línea recta se le llama **eje de simetría**.



**E** 1. Trace el eje de simetría en cada figura.

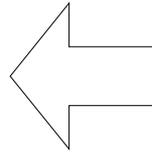


2. Identifique cuántos ejes de simetría tiene cada figura.

a.

b.

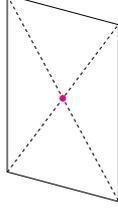
c.



### Sección 9 Simetría

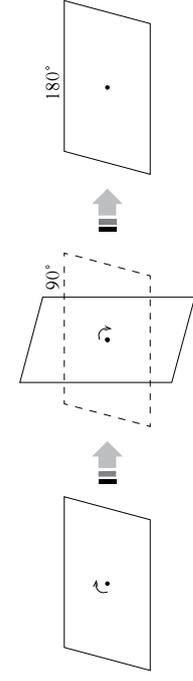
#### Clase 2 Simetría radial

**P** Existen dos paralelogramos colocados uno sobre otro y sostenidos por el centro de los paralelogramos.



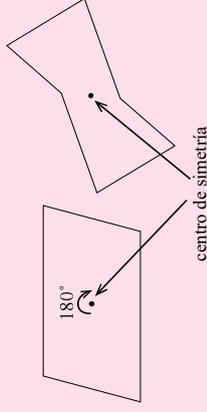
La diagonal une dos vértices no consecutivos.

¿Cuántos grados debe girar el paralelogramo de arriba para que se sobreponga exactamente con el de abajo?

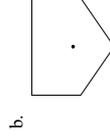
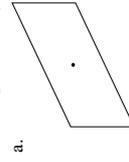


Respuesta: 180°

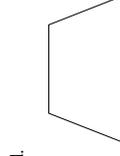
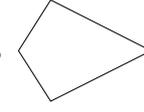
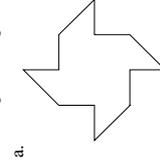
**C** Cuando una figura gira 180° alrededor de un punto y se sobrepone exactamente con la original, a esa figura se le llama **figura de simetría radial**. El punto es llamado **centro de simetría**.



**E** 1. Identifique si las figuras de abajo tienen simetría radial.



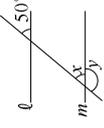
2. Clasifique las siguientes figuras según su simetría en axial o radial.



## Ejercitación A

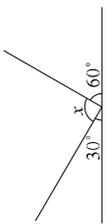
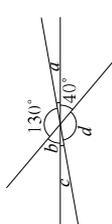
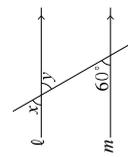
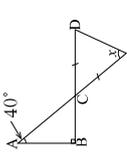
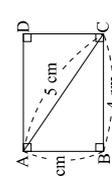
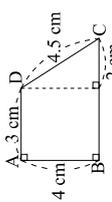
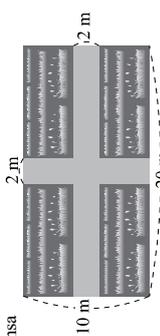
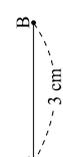
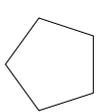
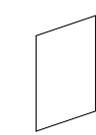
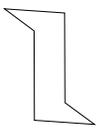
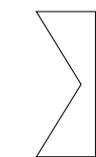
- Trace una recta, segmento o rayo, según sea requerido en cada inciso.
  - $\overline{AB}$
  - $\overline{CD}$
  - $\overline{EF}$
- Mida con el transportador los siguientes ángulos e identifique cuál es agudo y cuál es obtuso.
  - 
  -
- Encuentre todas las parejas de ángulos que son complementarios.
  - 
  - 
  -
- Identifique en cuál de las siguientes figuras se representa la bisectriz de un ángulo.
  - 
  - 
  -
- Simbolice con el signo " $\perp$ ", " $\parallel$ " o " $\parallel$ " las relaciones que existen entre los segmentos indicados del trapecio ABCD.
  - $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$
  - $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$
- Construya con escuadras una línea paralela a la recta  $\ell$  que pase por el punto P.
- Identifique la figura que representa la mediatriz del  $\overline{AB}$ .
  - 
  - 
  -
- Determine el valor de los ángulos que se indican en cada inciso.
  - 
  -

- Encuentre el valor del  $4x$  y  $4y$ , si  $\ell \parallel m$ .

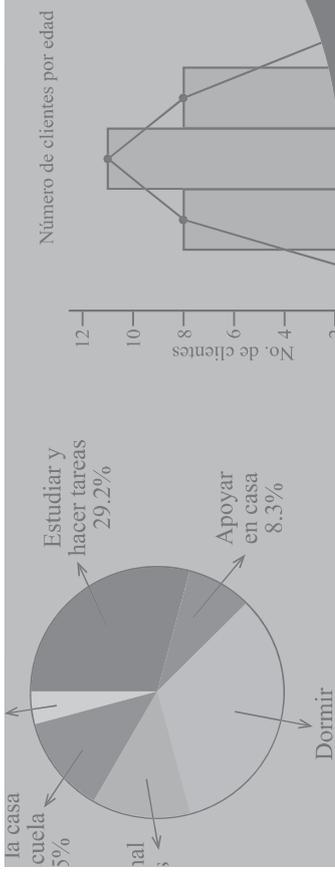


- Clasifique las siguientes figuras según sean cerradas o abiertas.
  - 
  -
- Clasifique las siguientes figuras según sean cóncavas o convexas.
  - 
  -
- Encuentre el valor del  $4x$  e identifique cuál de los siguientes triángulos es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.
  - 
  - 
  -
- Encuentre el perímetro y el área de las siguientes figuras.
  - Triángulo ABC
  - Paralelogramo ABCD
- Escriba el nombre de los siguientes polígonos.
  - 
  -
- Construya con regla y compás, un triángulo equilátero ABC con cada lado de 4 cm.
- Trace el eje de simetría en cada figura.
  - 
  -

### Ejercitación B

- Calcule la medida del  $\angle x$  en la figura que está a la derecha.
 
- Trace con regla y compás la mediatriz de  $\overline{AB}$  que está a la derecha.
 
- Encuentre el valor de los ángulos de la figura que está a la derecha.
 
- Encuentre el valor del  $\angle x$  y  $\angle y$ , si  $\ell \parallel m$ .
 
- Si  $CD = CE$ , encuentre el valor del  $\angle x$ .
 
- Encuentre el perímetro y el área de las siguientes figuras.
  - Triángulo ADC
 
  - Trapezoido ABCD
 
- El jardín tiene un largo de 20 m y ancho de 10 m. Se piensa construir pasos peatonales uniformes de 2 m de ancho. Calcule el área que queda para jardinerización en  $m^2$ .
 
- Construya con regla y compás un cuadrado con un segmento  $\overline{AB}$  de 3 cm.
 
- Clasifique las siguientes figuras según su simetría en axial o radial.
  - 
  - 
  - 
  - 

En los triángulos isósceles los dos ángulos de la base son iguales.



# Unidad 6

# Estadística

## Sección 1 Organización de datos

### Clase 1 Población y muestra



El profesor de educación física desea saber cuántos estudiantes de primero básico están interesados en participar en el club de fútbol. Para ello, entrevista a 50 estudiantes elegidos al azar para conocer su interés por pertenecer a este club.



- ¿A quiénes está dirigido el club de fútbol?
  - ¿Quiénes responderán la entrevista del profesor?
- A todos los estudiantes de primero básico.
  - Los 50 estudiantes de primero básico elegidos al azar.



En estadística, al conjunto de todos los posibles individuos u objetos de interés se le llama **población**. A una porción o parte de la población que refleje las mismas características de la población se le llama **muestra**.

En **S**, todos los estudiantes de primero básico son la población y los 50 estudiantes entrevistados son la muestra.



Identifique cuál es la población y cuál es la muestra en cada uno de los siguientes casos.

- Para el partido de fútbol de Guatemala contra Costa Rica, se desea saber el vaticinio de los aficionados guatemaltecos. Para ello, se entrevistó a 400 aficionados.
- El director de un instituto desea saber a cuántos estudiantes les interesa participar en una mañana deportiva. Para ello, entrevistó a 60 estudiantes elegidos al azar.
- Una empresa de aguas gaseosas desea saber el sabor de gaseosa preferida por los jóvenes guatemaltecos entre 12 y 16 años de edad. Para ello, se entrevistó a 1.500 jóvenes entre esas edades.
- Se desea saber la calidad del café cosechado en una finca de Antigua Guatemala. Para ello, se tomaron 5 costales al azar de la cosecha pasada.

## Sección 1 Organización de datos

### Clase 2 Elaboración de tablas de frecuencias para datos no agrupados



En un corral hay 20 gallinas y cada una se identifica con una letra. La tabla de abajo muestra la cantidad de huevos que cada gallina puso en los últimos 15 días.

Gallina	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
Cantidad de huevos	9	8	5	8	7	9	8	10	7	10	11	7	8	10	8	6	7	6	8	9

- Complete la tabla que representa la cantidad de huevos y su relación con la cantidad de gallinas.

Cantidad de huevos	5	6	7	8	9	10	11
Conteo							
Cantidad de gallinas							

- ¿Cuál es la mayor cantidad de gallinas que puso la misma cantidad de huevos? ¿Cuántos huevos puso cada gallina?



- Para completar la tabla, encuentre el número de gallinas que pusieron la misma cantidad de huevos.

Cantidad de huevos	5	6	7	8	9	10	11
Conteo							
Cantidad de gallinas	1	2	4	6	3	3	1

- Según la tabla, 6 gallinas pusieron la misma cantidad de huevos. Cada una de estas gallinas puso 8 huevos.



Al número de veces que aparece un determinado valor se le llama **frecuencia**. La **tabla de frecuencias** resume los valores y sus frecuencias.



- Complete la tabla de frecuencias con los siguientes datos.  
Goles anotados en 15 jornadas de la Liga Mayor de Fútbol de Guatemala.  
7, 6, 8, 9, 11, 3, 9, 7, 5, 8, 6, 4, 9, 10, 13

Cantidad	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Conteo											
Cantidad de jornadas											

- Elabore una tabla de frecuencias para cada uno de los siguientes conjuntos de datos.

- Suma de los puntos de dos dados lanzados en 20 ocasiones.  
2, 4, 5, 6, 7, 8, 4, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 8, 9, 10, 11
- Número de hermanos que tienen cada uno de los estudiantes de primero básico sección "B".  
1, 3, 2, 0, 4, 3, 0, 1, 5, 0, 2, 2, 3, 2, 6, 5, 1, 0, 5, 5, 3, 0, 5, 0, 2, 5, 1, 5
- Cantidad de sandías cosechadas por una persona durante 15 días.  
15, 22, 15, 45, 50, 32, 22, 33, 58, 47, 25, 52, 55, 47

## Sección 1 Organización de datos

### Clase 3 Lectura de datos en tablas

La tabla que está abajo muestra los datos sobre los deportes preferidos de 300 estudiantes.

Deporte	Natación	Atletismo	Karate	Fútbol	Ajedrez	Básquetbol
Número de estudiantes	24	41	52	117	32	34

- Identifique el deporte que más les gusta.
  - Identifique el deporte que menos les gusta.
  - Ordene de mayor a menor los seis deportes según la preferencia de los estudiantes.
- a. Según la tabla, hay 117 estudiantes que prefieren fútbol. Entre los seis deportes, este tiene el mayor número de estudiantes.

Deporte	Natación	Atletismo	Karate	Fútbol	Ajedrez	Básquetbol
Número de estudiantes	24	41	52	117	32	34

Respuesta: el fútbol es el deporte que más les gusta.

- Según la tabla, hay 24 estudiantes que prefieren natación. Entre los seis deportes, este tiene el menor número de estudiantes.

Deporte	Natación	Atletismo	Karate	Fútbol	Ajedrez	Básquetbol
Número de estudiantes	24	41	52	117	32	34

Respuesta: la natación es el deporte que menos les gusta.

- Según la tabla, el orden de los deportes preferidos es el siguiente:

Deporte	Natación	Atletismo	Karate	Fútbol	Ajedrez	Básquetbol
Número de estudiantes	24	41	52	117	32	34
Orden de preferencia	6	3	2	1	5	4

Respuesta: fútbol, karate, atletismo, básquetbol, ajedrez y natación.

Una tabla de frecuencias resume los valores y sus frecuencias. Los datos organizados en la tabla facilitan comprender la información.

La tabla que está abajo muestra las ventas de frutas a 420 clientes en una tienda.

Frutas	Melón	Mango	Naranja	Manzana	Sandía	Uva	Fresa
Número de clientes que compraron	24	71	82	117	32	34	60

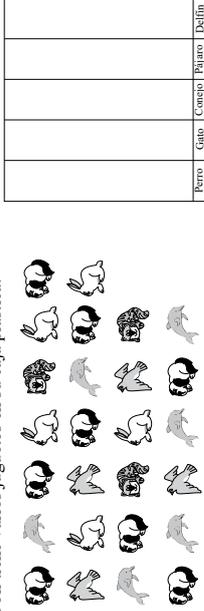
Resuelva:

- Identifique la fruta más vendida.
- Identifique la fruta menos vendida.
- Ordene las siete frutas de la más vendida a la menos vendida.

## Sección 2 Presentación de datos

### Clase 1 Organización de datos en un pictograma

Poli tiene varios juguetes en su caja plástica.



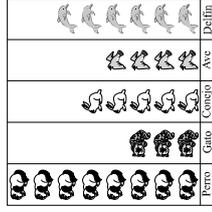
- ¿Qué animales se encuentran en la caja de juguetes?
- Ordene los juguetes en la tabla de arriba y compare la cantidad de cada juguete.
- ¿Cuál es el juguete que se encuentra en mayor cantidad dentro de la caja? ¿Cuántos son?



- Hay perros, gatos, conejos, pájaros y delfines.

- En el diagrama de la derecha se puede observar la cantidad de cada juguete: 8 de perro, 3 de gato, 5 de conejo, 4 de pájaro y 6 de delfín.

- El juguete que se encuentra en mayor cantidad es el perro, con 8 unidades.



A un diagrama que muestra información estadística a través de imágenes o símbolos se le llama **pictograma**.



- La tabla muestra las materias favoritas de los estudiantes y el número de estudiantes que prefieren cada materia.

Materia favorita	Número de estudiantes
Matemática	15
Ciencias Naturales	8
Computación	12
Comunicación y Lenguaje	15

Elabore un pictograma usando como ícono del estudiante.

- Los estudiantes de primero básico sección "B" llevaron una fruta cada uno al instituto para celebrar el fin de ciclo escolar.



- Elabore un pictograma del número de frutas.
- ¿Cuántas frutas de cada tipo se encuentran?

Frutas	Banano	Naranja	Piña	Mango	Papaya
Cantidad					

## Sección 2 Presentación de datos Clase 2 Gráfica de barras

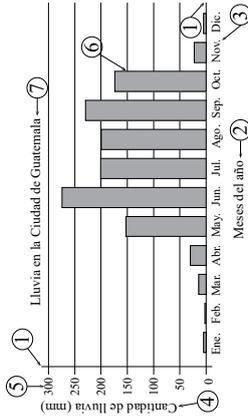
La tabla muestra el registro de la lluvia en mm en la ciudad de Guatemala.

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Agosto	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Lluvia (mm)	8	3	13	30	152	274	203	231	173	23	8	8

Elabore una gráfica de barras con los datos que están en la tabla.

Para dibujar una gráfica de barras:

- Trace el eje vertical y horizontal.
- Escriba el nombre del eje horizontal.
- Escriba los nombres de los datos que representan las barras.
- Escriba el nombre del eje vertical.
- Decida la escala del eje vertical.
- Dibuje las barras verticales para representar cada número.
- Escriba el título del gráfico.



## Sección 2 Presentación de datos Clase 3 Diagrama de sectores

La siguiente tabla muestra cómo los padres de Ana han organizado las actividades diarias de su hija para que mejore sus notas en clase.

Actividad	Cantidad de horas invertidas	Porcentaje	Ángulo central
Estudiar y hacer tareas	7	29.2	
Apoyar en casa	2	8.3	
Dormir	8	33.3	
Aseo personal y comidas	3	12.5	
Viaje de la casa a la escuela	3	12.5	
Jugar	1	4.2	
Total	24	100	360°

- Dado que el ángulo central del círculo es  $360^\circ$ , ¿cuál es la medida del ángulo que corresponde al 1%?
- ¿Cuánto debe medir el ángulo que corresponde a cada uno de los porcentajes? Complete la tabla.
- Elabore un diagrama de sectores.

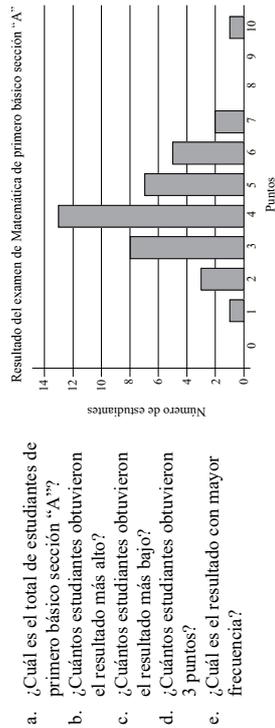
A una gráfica que resume un conjunto de información con el uso de una cantidad de barras del mismo ancho, se le llama **gráfica de barras**. Cada barra representa una categoría particular. La altura de cada barra es proporcional a la cantidad que representa. Las gráficas de barras pueden presentarse en forma vertical u horizontal.

- Para el proyecto "colorea tu establecimiento", Maribel preguntó a sus compañeros de clase su color favorito. Las respuestas fueron las siguientes:

Cantidad de personas que prefieren el color rojo: 11  
 Cantidad de personas que prefieren el color azul: 7  
 Cantidad de personas que prefieren el color verde: 9  
 Cantidad de personas que prefieren el color amarillo: 6

- Elabore una tabla con los datos obtenidos.
- Construya una gráfica de barras con base en la tabla realizada.

- La gráfica muestra el resultado del examen de Matemática de primero básico sección "A".



- ¿Cuál es el total de estudiantes de primero básico sección "A"?
- ¿Cuántos estudiantes obtuvieron el resultado más alto?
- ¿Cuántos estudiantes obtuvieron el resultado más bajo?
- ¿Cuántos estudiantes obtuvieron 3 puntos?
- ¿Cuál es el resultado con mayor frecuencia?

- La medida del ángulo correspondiente al 1% se calcula:  $360^\circ \div 100 = 3.6^\circ$ .
- Debido a que  $3.6^\circ$  corresponde al 1%, para saber cuánto debe medir el ángulo correspondiente a cada uno de los porcentajes, se multiplica cada uno de ellos por 3.6.

Se utiliza el símbolo  $\approx$  para representar que dos cantidades son aproximadamente iguales.



$$29.2 \times 3.6^\circ = 105.12^\circ \approx 105^\circ$$

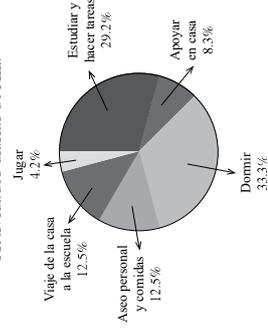
$$8.3 \times 3.6^\circ = 29.88^\circ \approx 30^\circ$$

$$33.3 \times 3.6^\circ = 119.88^\circ \approx 120^\circ$$

$$12.5 \times 3.6^\circ = 45^\circ$$

$$4.2 \times 3.6^\circ = 15.12^\circ \approx 15^\circ$$

Actividades diarias de Ana



- Para construir el diagrama de sectores se utilizan los ángulos centrales obtenidos a partir de cada uno de los porcentajes.

Sección 3 Medidas de tendencia central  
Clase 1 Media aritmética

**C** A una gráfica que muestra las proporciones en las que cada sector es visualmente representado se le llama **diagrama de sectores**. Para representar la información en un diagrama de sectores:

Paso 1. Se encuentra el porcentaje para cada categoría de estudio.

Paso 2. Se encuentra el ángulo central que corresponde a cada categoría (multiplicando su porcentaje por 3,6°).

Paso 3. Se utilizan los ángulos centrales obtenidos para dibujar la gráfica.



Los datos corresponden al registro diario del total de clientes atendidos en dos sucursales de una panadería.

Sucursal A	Sucursal B
14, 23, 38, 38, 19, 31, 49, 26, 24, 30, 38	13, 22, 24, 20, 30, 37, 34, 46, 29, 28, 24, 21

¿Qué sucursal atendió más clientes por día?



Para encontrar el promedio de clientes por día, es necesario sumar todos los datos y dividir entre el número de días.

Sucursal A:

$$\text{(Suma de los clientes)} = 14 + 23 + 38 + 38 + 19 + 31 + 49 + 26 + 24 + 30 + 38 = 330$$

En la sucursal A, se atendieron 330 clientes en 11 días.

$$\text{(Promedio)} = \frac{\text{(Suma de todos los datos)}}{\text{(Número de datos)}} = \frac{330}{11} = 30$$

Por tanto, la sucursal A atendió 30 clientes por día.

Sucursal B:

$$\text{(Suma de los clientes)} = 13 + 22 + 24 + 20 + 30 + 57 + 34 + 46 + 29 + 28 + 24 + 21 = 348$$

En la sucursal B, se atendieron 348 clientes en 12 días.

$$\text{(Promedio)} = \frac{\text{(Suma de todos los datos)}}{\text{(Número de datos)}} = \frac{348}{12} = 29$$

Por tanto, la sucursal B atendió 29 clientes por día.

Respuesta: la sucursal que atendió más clientes por día es la sucursal A.



A un valor que se obtiene al dividir la suma de todos los datos (x) entre el número de datos (n) se le llama **media aritmética**. La media aritmética se representa con  $\bar{x}$  y se le conoce también como promedio.

$$\bar{x} = \frac{\text{Suma de todos los datos (x)}}{\text{Número de datos (n)}}$$

En el problema de arriba la media aritmética de la sucursal A es 30 y la media aritmética de la sucursal B es 29.



Los datos corresponden a las ventas expresadas en quetzales de los últimos 15 días de las dos sucursales de la tienda "Las Quince Letras".

Sucursal I: 35, 35, 40, 50, 50, 70, 75, 80, 80, 80, 80, 90, 125, 125, 125.  
Sucursal II: 40, 50, 50, 60, 70, 70, 75, 75, 80, 90, 90, 100, 140, 150.

- Encuentre la media aritmética.
- Identifique la sucursal que generó mayores ingresos por día.



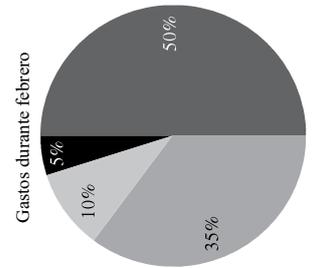
1. Se entrevistó a 40 estudiantes de primero básico en un instituto de Quetzaltenango sobre los tipos de música preferida. De todos los estudiantes entrevistados, a 10 les gusta el pop, a 15 el reggaetón y a 15 el rock.

- Complete la tabla.

Música preferida	Número de estudiantes	Porcentaje	Ángulo central
Reggaetón	15	37,5	
Rock	15	37,5	
Pop	10	25	
Total	40	100	360°

- Elabore un diagrama de sectores con los datos de la tabla anterior.

- La gráfica muestra cómo la familia González gastó su salario durante el mes de febrero.



- ¿Qué porcentaje representa el alquiler?
- ¿En qué rama gastó más?
- Si su salario fue de Q4.000,00, ¿cuánto ahorró la familia este mes?

### Sección 3 Medidas de tendencia central Clase 2 Mediana

**P** Los datos corresponden al registro diario del total de clientes atendidos en dos sucursales de una panadería.

Sucursal A	Sucursal B
14, 23, 38, 38, 19, 31, 49, 26, 24, 30, 38	13, 22, 24, 20, 30, 57, 34, 46, 29, 28, 24, 21

- Ordene la cantidad de clientes atendidos en ambas sucursales de menor a mayor.
- Encuentre el valor central del conjunto de datos ordenado de menor a mayor de las dos sucursales de la panadería.

**S** a. Al ordenar de menor a mayor los datos de los clientes atendidos en las dos sucursales de la panadería, se tiene:  
 Sucursal A: 14, 19, 23, 24, 26, 30, 31, 38, 38, 38, 49  
 Sucursal B: 13, 20, 21, 22, 24, 24, 28, 29, 30, 34, 46, 57.

- Para encontrar el dato que ocupa la posición central en la serie de datos, se tiene:

$$\text{Sucursal A: } 14, 19, 23, 24, 26, \overset{\text{Sexto lugar}}{\leftarrow} \underline{30}, \overset{\text{Sexto lugar}}{\rightarrow} 31, 38, 38, 38, 49$$

En la sucursal A, se tienen 11 datos (número impar). Entonces, el dato que ocupa la posición central corresponde a 30, que se encuentra en el sexto lugar. Por tanto, el valor central es 30.

$$\text{Sucursal B: } 13, 20, 21, 22, 24, \overset{\text{Sexto lugar}}{\leftarrow} \underline{24}, \overset{\text{Sexto lugar}}{\rightarrow} 28, 29, 30, 34, 46, 57$$

En la sucursal B, se tienen 12 datos (número par). Entonces, se toman los dos valores centrales y se calcula el promedio entre ambos, así:  $(\text{promedio}) = \frac{24 + 28}{2} = 26$ . Por tanto, el valor central es 26.

**G** A un valor que ocupa la posición central en una serie de datos ordenados se le llama **mediana**. Para encontrar la mediana se ordenan los datos de menor a mayor y se consideran los siguientes casos:

- Quando el número de datos ( $n$ ) es impar, la mediana es el dato que ocupa la posición central, que se encuentra por:  $\frac{n+1}{2}$ .  
 Ejemplo:  
 En la sucursal A,  $n = 11$ . Entonces, la posición de la mediana es:  $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$ .
- Quando el número de datos ( $n$ ) es par, la mediana es el número que se encuentra entre el conjunto de los dos datos centrales.  
 Ejemplo:  
 En la sucursal B,  $n = 12$ . Entonces, la posición de la mediana es:  $\frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$ .  
 Lo que indica es que la mediana está entre el dato 6 y 7, y es el punto medio de los datos.  
 En el problema de arriba la mediana de la sucursal A es 30 y la mediana de la sucursal B es 26.

**E** Los datos corresponden a las ventas expresadas en quetzales de los últimos 15 días de las dos sucursales de la tienda "Las Quince Letras".

Sucursal I: 125, 35, 50, 40, 80, 125, 70, 50, 125, 75, 80, 90, 80, 80, 35.  
 Sucursal II: 100, 75, 50, 80, 60, 40, 70, 75, 140, 90, 75, 70, 150, 50, 90.

Encuentre la mediana según los datos de cada sucursal.

### Sección 3 Medidas de tendencia central Clase 3 Moda

**P** Los datos corresponden al registro diario del total de clientes atendidos en dos sucursales de una panadería.

Sucursal A	Sucursal B
14, 23, 38, 38, 19, 32, 49, 26, 24, 30, 38	13, 22, 24, 20, 30, 57, 34, 46, 29, 28, 24, 21

¿Cuál es el valor que más se repite en la serie de datos de las dos sucursales?

**S** Al observar la serie de datos se puede concluir que:

En la Sucursal A, el número 38 aparece 3 veces. Entonces, el dato que más se repite es 38.

En la Sucursal B, el número 24 aparece 2 veces. Entonces, el dato que más se repite es 24.

**G** A un valor que tiene la mayor frecuencia en una serie de datos se le llama **moda**. En el problema de arriba la moda de la sucursal A es 38 y la moda de la sucursal B es 24.  
 Si en algún caso todos los datos de una serie aparecen igual cantidad de veces, se dice que la serie no tiene moda.

**E** Los datos corresponden a las ventas expresadas en quetzales de los últimos 15 días de dos sucursales de la tienda "Las Quince Letras":

Sucursal I: 125, 35, 50, 40, 80, 125, 70, 50, 125, 75, 80, 90, 80, 80, 35.  
 Sucursal II: 100, 75, 50, 80, 60, 40, 70, 75, 140, 90, 75, 70, 150, 50, 90.

Encuentre la moda.

## Sección 4 Organización de datos agrupados

### Clase 1 Datos agrupados

Los datos corresponden al registro de edad de 30 clientes atendidos durante un día en un salón de belleza.

Clasifique los siguientes datos en 5 agrupaciones de 4 en 4. Inicie el conteo en 20 y termine en 40.

24 23 28 30 29 31  
27 26 24 30 32 29  
21 22 27 33 30 24  
24 21 26 24 30 39  
24 22 22 24 21 20

Para ordenar los datos, primero se crean las agrupaciones iniciando en 20. En este grupo quedan los datos que son iguales o mayores que 20 y menores que 24. Se continúa de 4 en 4 hasta llegar a 40.

20–24	24–28	28–32	32–36	36–40
-------	-------	-------	-------	-------

Agrupaciones

Para facilitar la clasificación de los datos se escribe cada dato en una tabla, siguiendo el orden en que aparecen, como se muestra a continuación:

24				
24				
24				
20	26	30		
21	24	30		
22	24	29		
22	27	30		
21	24	31		
22	26	29		
21	27	30	33	
23	24	28	32	39
20–24	24–28	28–32	32–36	36–40

Agrupaciones

Para organizar una serie de datos agrupados:

Paso 1. Se definen las agrupaciones considerando el número de agrupaciones a crear y sus límites.  
Paso 2. Se colocan los datos uno a uno en la agrupación a la que pertenecen. En cada agrupación deben quedar los datos cuyo valor es mayor o igual que el límite menor y menor que el límite mayor.

- Los datos corresponden al registro de edad de 30 clientes atendidos en la tienda de ropa “Somos únicos”.
- Clasifique los datos en 5 agrupaciones de 4 en 4. Inicie en 20 y termine en 40.
  - Elabore la tabla con los datos según las agrupaciones creadas.

## Sección 4 Organización de datos agrupados

### Clase 2 Tabla de frecuencia para datos agrupados

Retomando los datos de la clase anterior:

- Determine el total de datos de cada agrupación y anote el resultado.
- ¿En qué agrupación se concentró el mayor número de clientes?
- ¿Qué cantidad de clientes tiene una edad inferior a 32 años?

20	26	30		
21	24	30		
22	24	29		
22	27	30		
21	24	31		
22	26	29		
21	27	30	33	
23	24	28	32	39
20–24	24–28	28–32	32–36	36–40

Agrupaciones

- Se elabora una tabla donde se colocan las agrupaciones en la primera columna, como se muestra en la tabla de la derecha. Se realiza el conteo de los datos que quedan en cada agrupación y se coloca el resultado en la segunda columna, como se muestra en la tabla de la derecha.
- En la agrupación de edades de 24 a 28 se concentró el mayor número de clientes.
- Para determinar la cantidad de clientes atendidos con edad inferior a 32 años, se cuentan los clientes que quedan en las primeras 3 agrupaciones:  $8 + 11 + 8 = 27$ . Por tanto, 27 clientes tienen edad inferior a 32 años.

A una tabla en la que se organizan los datos agrupados se le llama tabla de frecuencias. A cada agrupación de datos se le llama **clase** y al número total de datos que corresponden a cada clase se le llama frecuencia.

Mario y Carlos se reunieron todas las tardes para jugar básquetbol durante el último mes. Ellos han llevado un registro de los tiempos jugados por cada uno. Los datos se muestran a continuación. Ordene los datos en una tabla de frecuencias.

Mario Carlos

10	13				
11	15	21			
12	14	21			
11	13	16	20		
12	15	17	19		
11	13	16	20		
10	14	17	19	23	
12	13	18	20	22	
De 10 a 13	De 13 a 16	De 16 a 19	De 19 a 22	De 22 a 25	

					24
		17	21	21	24
	13	18	20	22	22
11	13	16	19	23	23
11	14	16	19	22	22
11	13	18	19	22	22
10	15	17	20	20	23
De 10 a 13	De 13 a 16	De 16 a 19	De 19 a 22	De 22 a 25	

## Sección 4 Organización de datos agrupados

### Clase 3 Lectura y construcción de histogramas



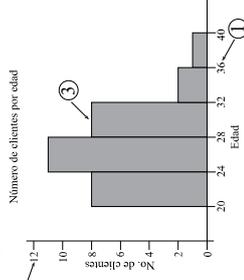
La tabla contiene el registro de edad de 30 clientes atendidos en la tienda “Las Quince Letras”.

- Represente las clases con sus respectivas frecuencias mediante rectángulos.
- ¿Qué características tiene la gráfica que muestra la distribución de los clientes atendidos en la tienda “Las Quince Letras”?

Clase (Edad)	Frecuencia (Número de clientes)
20–24	8
24–28	11
28–32	8
32–36	2
36–40	1
Total	30



- Para representar las frecuencias de cada clase mediante rectángulos:
  - Coloque los límites de las clases sobre el eje horizontal.
  - Coloque el número de clientes que corresponde a la frecuencia de cada clase sobre el eje vertical.
  - Sobre el ancho de las clases, se construyen rectángulos cuya altura coincida con la frecuencia de cada clase.



Como el límite superior de una clase es igual al inferior de la siguiente, los rectángulos quedan pegados, uno a continuación del otro.

- Al observar la gráfica se puede notar que la mayor cantidad de clientes atendidos tienen edad entre 24 y 28 años, lo que corresponde al segundo rectángulo dibujado.



A una gráfica que representa las frecuencias de las clases por medio de rectángulos se le llama **histograma**. Para elaborar un histograma:

- Se colocan los límites de las clases sobre el eje horizontal y la frecuencia sobre el eje vertical.
- Se busca una escala adecuada considerando los valores de la frecuencia de la distribución de los datos.
- Se forman rectángulos cuya base coincida con el ancho de clase y la altura con la frecuencia de la respectiva clase.

Al observar el histograma se puede encontrar que la parte más alta indica dónde se encuentra el mayor número de datos. Los rectángulos que forman el histograma tienen un área proporcional a la frecuencia de su clase.



La tabla contiene el registro de las edades de 50 clientes atendidos en un día festivo en la farmacia “Salud y Vida”.

- Represente los datos mediante un histograma.
- ¿Qué características tiene la gráfica que muestra la distribución de las edades de los 50 clientes atendidos en la farmacia “Salud y Vida”?

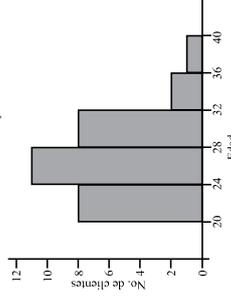
Clase (Edad)	Frecuencia (Número de clientes)
20–24	14
24–28	11
28–32	10
32–36	8
36–40	7
Total	50

## Sección 4 Organización de datos agrupados

### Clase 4 Lectura y construcción de polígonos de frecuencias



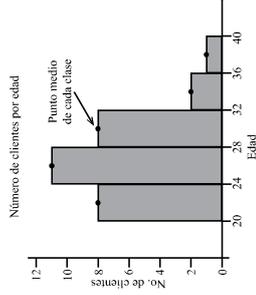
El histograma que está a la izquierda muestra la edad de 30 clientes atendidos en la tienda “Las Quince Letras”.



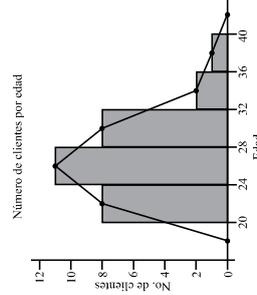
- Localice el punto medio del lado superior del rectángulo de cada clase.
- Una con segmentos los puntos graficados en el inciso anterior.



- Localice el punto medio del lado superior del rectángulo de cada clase.



- Al unir los puntos se obtiene una línea poligonal abierta. Tal como se muestra en la gráfica de la derecha, se agrega una clase a la izquierda del primer rectángulo y otra clase a la derecha del último rectángulo, haciendo las frecuencias 0 para completar el polígono.



A una gráfica que representa las frecuencias de las clases por medio de segmentos se le llama **polígono de frecuencias**.

Para construir un polígono de frecuencias:

- Se localiza el punto medio del lado superior de cada rectángulo.
- Se unen los puntos identificados con un segmento.
- Se agrega una clase del mismo ancho a la derecha y otra a la izquierda con frecuencia cero para completar el polígono de frecuencias.

El polígono de frecuencias se utiliza para resaltar la forma de la distribución de los datos.

Con base en el histograma realizado en la clase anterior:

- Una los puntos medios de los lados superiores del rectángulo de cada clase.
- Agregue una clase del mismo ancho a la izquierda del primer rectángulo y a la derecha del último rectángulo con frecuencia cero. Una esos puntos también.

## Ejercitación

1. Hay 20 estudiantes en una sección de primero básico y se realizó una encuesta con ellos sobre sus horas de sueño.

La tabla que está abajo muestra las horas de sueño de los estudiantes.

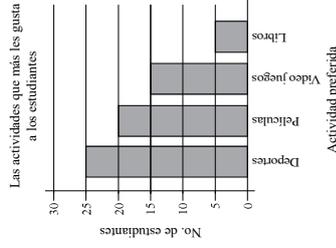
Estudiante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
Horas de sueño	10	8	7	7	5	9	8	6	8	7	5	7	8	9	7	5	6	8	7	6

- a. Complete la tabla que representa las horas de sueño y la cantidad de estudiantes.

Horas de sueño	5	6	7	8	9	10
Cantidad de estudiantes						

- b. ¿En qué horas de sueño se encuentra la mayor frecuencia?  
c. ¿En qué horas de sueño se encuentra la menor frecuencia?

2. En la siguiente gráfica de barras, se muestran las actividades que más les gusta a los estudiantes de primero básico.



- a. ¿Cuántos estudiantes hay en cada actividad?  
b. ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de estudiantes en la actividad que más les gusta con la cantidad de estudiantes en la actividad que menos les gusta?  
c. ¿Cuál es la cantidad total de estudiantes de primero básico?

3. En la siguiente tabla, se muestran los resultados de pruebas en Matemática de estudiantes de las secciones A y B de un instituto.

Sección A	46, 72, 85, 58, 70, 64, 52, 57, 30, 45, 77, 82, 64, 71, 38, 49, 89, 87, 68, 59, 60
Sección B	71, 54, 65, 84, 48, 59, 88, 76, 53, 61, 37, 78, 80, 70, 58, 65, 89, 71, 71, 82

- a. Encuentre la media aritmética de cada sección.  
b. Identifique la sección que tiene la mayor media aritmética.  
c. Encuentre la mediana de cada sección.  
d. Encuentre la moda de cada sección.  
e. Clasifique los datos de la sección A en 6 grupos de 10 en 10 iniciando en 30 y terminando en 90.

Todos los números son divisibles entre 7.  
Cualquier persona es guatemalteca.

$$x + 10 = 15.$$

2 es un número par y es un número primo.  
Si mañana es jueves entonces hoy es miércoles.

# Unidad 7



# Lógica



¿Cuáles de los siguientes enunciados pueden determinarse como verdaderos o falsos?

- Un triángulo tiene tres lados.
- $3 \times 5 = 15$
- 10 es múltiplo de 3.
- $5 + 3$



Analizando cada enunciado se obtiene:

- Verdadero
- Verdadero
- Falso
- No es posible determinar si es verdadero o falso.



A un enunciado que brinda información que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo, se le llama **proposición**.

Verdadero o falso son llamados **valores de verdad** de una proposición. Si una proposición es verdadera, entonces su valor de verdad es verdadero. Si una proposición es falsa, entonces su valor de verdad es falso.



Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- $10 + 153 = 6$
- Los números pares son divisibles entre 2.
- Guatemala tiene 20 departamentos.
- 3 es un número impar.
- $5 \times 4 = 20$
- 6 es divisor de 24.
- $3^2 = 9$
- Guatemala es un país centroamericano.



¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones?

- $x + 10 = 15$ .
- $y$  es divisor de 18.



No se puede determinar el valor de verdad de ambas proposiciones, porque depende de los valores de  $x$  o  $y$ . Al asignar un valor cualquiera al sujeto, la proposición puede ser verdadera o falsa.

- Si  $x = 5$ , entonces  $5 + 10 = 15$ . Por tanto, la proposición se hace verdadera.  
Si  $x = 3$ , entonces  $3 + 10 \neq 15$ . Por tanto, la proposición se hace falsa.
- Si  $y = 3$ , entonces 3 es divisor de 18. Por tanto, la proposición se hace verdadera.  
Si  $y = 5$ , entonces 5 no es divisor de 18. Por tanto, la proposición se hace falsa.  
Si  $y = 2$ , entonces 2 es divisor de 18. Por tanto, la proposición se hace verdadera.



A una letra que representa una cantidad desconocida en el sujeto de una proposición se le llama **variable**.

A una proposición que tiene una variable como sujeto se le llama **proposición abierta**.

La proposición abierta no puede calificarse como verdadera o falsa.

Al sustituir el valor o los valores de la variable en la proposición abierta, se puede determinar su valor de verdad.



Dadas las siguientes proposiciones, identifique cuáles son proposiciones abiertas y cuáles no.

- $x$  es un número par de un dígito.
- 9 es un número impar de un dígito.
- $5 + 3 = 10$
- $z - 2 = 8$
- Lunes es un día de la semana.
- El rombo es un cuadrilátero.
- $y$  es múltiplo de 30.



## Sección 1 Lógica

### Clase 3 Proposiciones compuestas



¿Qué diferencia hay entre las siguientes proposiciones?

- 7 es un número primo.
- 6 es divisor de 18 y 5 es un número impar.



Las proposiciones se diferencian por el número de enunciados que tienen. La proposición del inciso a tiene un enunciado, mientras que la proposición del inciso b tiene dos enunciados; estos son:

- 6 es divisor de 18.
- 5 es un número impar.



A una proposición que está formada por un enunciado se le llama **proposición simple**.  
A una proposición que está formada por dos o más enunciados se le llama **proposición compuesta**.

Ejemplo:

- Carlos va al cine o al estadio.  
La proposición es compuesta porque está formada por dos enunciados:  
Carlos va al cine.  
Carlos va al estadio.
- Un cuadrilátero tiene sus lados opuestos paralelos.  
La proposición es simple porque está formada por un enunciado.
- 10 es un número par y solo si es divisible entre 2.  
La proposición es compuesta porque está formada por dos enunciados:  
10 es un número par.  
10 es divisible entre 2.



- Identifique cuáles proposiciones son simples y cuáles son compuestas.
  - Lunes es un día de la semana.
  - Un rectángulo tiene  $20 \text{ m}^2$  de área si y solo si la base mide 5 m y la altura 4 m.
  - $5 + 56 = 61$  y  $5 + 60 = 65$ .
  - $6 \times 3 = 20$
  - El rectángulo es un paralelogramo si y solo si sus lados opuestos son paralelos.
  - Guatemala está en Centroamérica.
- Identifique cuántas proposiciones simples contienen los siguientes incisos.
  - $5 + 13 = 18$  y  $6 + 14 = 20$ .
  - La semana tiene siete días.
  - 20 es divisible entre 4.
  - 2 es un número par y es un número primo.
  - Si mañana es jueves o domingo, entonces voy de compras al mercado.

## Sección 1 Lógica

### Clase 4 Cuantificadores



¿Qué diferencia hay entre las siguientes proposiciones?

- Todos los números naturales en los que su última cifra es 0 o 5, son divisibles entre 5.
- Algunos cuadriláteros tienen cuatro ángulos rectos.



Las dos proposiciones se diferencian por la cantidad de elementos que cumplen con la condición establecida en el enunciado. En la proposición del inciso a todos los números naturales en los que su última cifra es 0 o 5, cumplen con la condición, mientras que en la proposición del inciso b solo algunos cuadriláteros cumplen con la condición.



A las palabras “todos” y “algunos” se les llama **cuantificadores** y existen dos tipos: **cuantificador universal** y **cuantificador existencial**.

El cuantificador universal se utiliza para afirmar que todos los elementos de un conjunto cumplen con una condición o propiedad determinada. Además de “todos”, se puede utilizar “cualquiera” o “cada”.

El cuantificador existencial se utiliza para indicar que existen uno o más elementos en el conjunto que cumplen con la condición o propiedad determinada. Además de “algunos”, se puede utilizar “hay”, “existe” o “algún”.

Ejemplo:

Proposición	Cuantificador
Cualquier número divisible entre 2 es número par.	Universal
Existe una figura que tiene tres lados.	Existencial
Algunos cuadriláteros tienen ángulos rectos.	Existencial
Todos los humanos tienen cerebro.	Universal



- Indique si el cuantificador utilizado en la proposición es universal o existencial.
- Todos los números pares son divisibles entre dos.
  - Hay números impares divisibles entre tres.
  - Cualquier número es divisible entre 1 y entre sí mismo.
  - Todos los números son divisibles entre 7.
  - Cualquier persona es guatemalteca.
  - Todos los rectángulos tienen cuatro ángulos rectos.
  - Hay una figura que tiene tres lados.
  - Algunos números son impares.

## Ejercitación

- Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
  - Un cuadrilátero tiene cuatro lados.
  - $12 + 6 = 18$
  - El volcán más alto de Guatemala es el Pacaya.
  - $2 \times 5 = 15$
  - $8 + 5$
- Determine cuáles de las siguientes proposiciones son abiertas.
  - $x + 10 = 18$
  - $15 - 6 = 9$
  - $x$  es un paralelogramo.
  - $y$  es un mes del año.
  - Una semana tiene siete días.
- Identifique cuáles proposiciones son simples y cuáles son compuestas.
  - El cuaderno tiene 80 hojas y el lapicero es de color azul.
  - Hoy es jueves.
  - $6 + 9 = 20$
  - Si  $A + B = C$ , entonces  $C - A = B$ .
- Indique si el cuantificador utilizado en la proposición es universal o existencial.
  - Todos los seres vivos tienen vida.
  - Algunos números son impares.
  - Hay cuadriláteros que tienen cuatro lados iguales.
  - El producto de cualquier número y dos es un número par.
  - Algunas personas tienen más de dos metros de estatura.